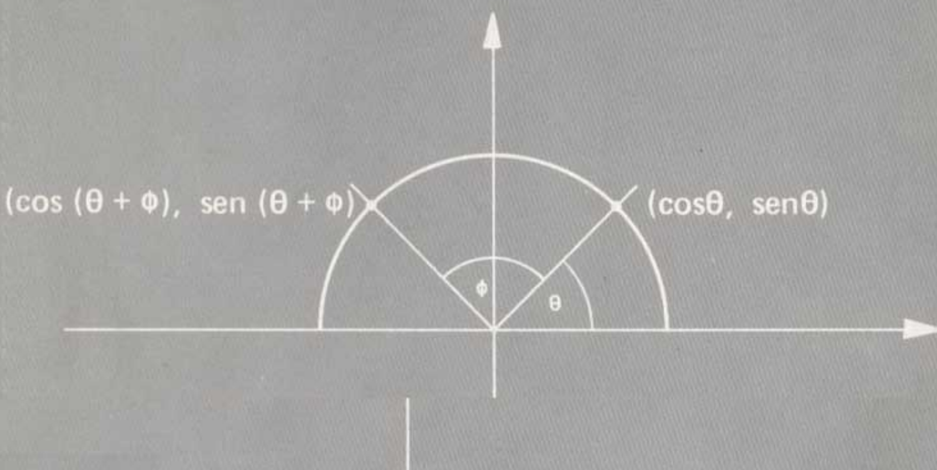
serie de matemática

monografía no. 13

# LA REVOLUCION EN LAS MATEMATICAS ESCOLARES (SEGUNDA FASE)

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos




$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\theta\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

# LA REVOLUCION EN LAS MATEMATICAS ESCOLARES (SEGUNDA FASE)

por
Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg
Teachers College
Columbia University
Nueva York, ESTADOS UNIDOS

Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico
Departamento de Asuntos Científicos
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D.C. - 1971

Título original en inglés:
"THE REVOLUTION IN SCHOOL MATHEMATICS, PHASE II"

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

Editora: Eva V. Chesneau

Revisor Técnico: Dr. Roberto Pablo José Hernández
Colegio Nacional de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina

# A los lectores

El programa de monografías científicas es una faceta de la vasta labor de la Organización de los Estados Americanos, a cargo del Departamento de Asuntos Científicos de la Secretaría General de dicha Organización, a cuyo financiamiento contribuye en forma importante el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico.

Concebido por los jefes de Estado Americanos en su Reunión celebrada en Punta del Este, Uruguay, en 1967, y cristalizado en las deliberaciones y mandatos de la Quinta Reunión del Consejo Interamericano Cultural, llevada a cabo en Maracay, Venezuela, en 1968, el Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es la expresión de las aspiraciones preconizadas por los Jefes de Estado Americanos en el sentido de poner la ciencia y la tecnología al servicio de los pueblos latinoamericanos.

Demostrando gran visión, tal altas autoridades reconocieron que la ciencia y la tecnología están transformando la estructura económica y social de muchas naciones y que, en esta hora, por ser instrumento indispensable de progreso en América Latina, necesitan un impulso sin precedentes.



El Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico es un complemento de los esfuerzos nacionales de los países latinoamericanos y se orienta hacia la adopción de medidas que permitan el fomento de la investigación, la enseñanza y la difusión de la ciencia y la tecnología; la formación y perfeccionamiento de personal científico; el intercambio de informaciones, y la transferencia y adaptación a los países latinoamericanos del conocimiento y las tecnologías generadas en otras regiones.

En el cumplimiento de estas premisas fundamentales, el programa de monografías representa una contribución directa a la enseñanza de las ciencias en niveles educativos que abarcan importantísimos sectores de la población y, al mismo tiempo, propugna la difusión del saber científico.

La colección de monografías científicas consta de cuatro series, en español y portugués, sobre temas de física, química, biología y matemática. Desde sus comienzos, estas obras se destinaron a profesores y alumnos de ciencias de enseñanza secundaria y de los primeros años de la universitaria; de éstos se tiene ya testimonio de su buena acogida.

Este prefacio brinda al Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico y a la Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos la ocasión de agradecer a los doctores Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg, autores de esta monografía, y a quienes tengan el interés y buena voluntad de contribuir a su divulgación.

Agosto de 1971

ÍNDICE


Página

A los Lectores .................................... iii

Prólogo .................................... 1

CAPÍTULO 1. REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN TODO EL MUNDO .............. 5

La Organización Clásica de las Matemáticas ........ 5
Movimientos Hacia la Reforma en Estados Unidos .... 7
Primeros Ensayos Europeos ...................... 8
Otras Reformas de Alcance Nacional .............. 12
Movimientos Significativos a Partir de 1964 ......... 14
La Revolución en las Matemáticas .................. 28

CAPÍTULO 2. DESENVOLVIMIENTO DEL ÁLGEBRA. EL ÁLGEBRA ACTUAL ......................... 31

Introducción .................................. 31
Álgebra Clásica ................................ 31
El Desarrollo del Álgebra Moderna ............... 35
El Álgebra Hoy ................................ 42
Álgebra para la Escuela Secundaria................ 44

CAPÍTULO 3. LA HISTORIA DE LA GEOMETRÍA. GEOMETRÍA HOY ............................ 49

Introducción .................................. 49
Primeras Nociones .............................. 49
La Era Euclidiana .............................. 50
Geometrías No Euclidianas ...................... 52
¡Hay Más de Una Geometría! ..................... 53
El Programa Erlangen ........................... 54
El Perfeccionamiento de la Geometría de Euclides ... 56
La Geometría Hoy ............................... 57
Geometría para la Escuela Secundaria ............. 58

CAPÍTULO 4. APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS.. 63

Introducción .................................. 63
Intervención de las Matemáticas en Otras Ciencias ... 63
Contribución de las Matemáticas al Aprendizaje de Otras Materias ............................. 65
Probabilidades ................................. 75
La Computadora Electrónica y la Programación Lineal ..................................... 81
El Problema de Nutrición ........................ 86

Una Observación Complementaria .................... 87
Conclusión ........................................ 87

CAPÍTULO 5. PROGRAMAS MODERNOS EN MATEMÁTICAS PARA LAS ESCUELAS SECUNDARIAS ......... 89

La Construcción Belga ............................. 89
Planes Suecos y Rusos ............................. 94
Estudio del Mejoramiento del Plan de Estudios de las Matemáticas en la Escuela Secundaria (SSMCIS) ..... 97
Estructura del Plan de Estudios Emergente ......... 99

CAPÍTULO 6. FORMACIÓN DE PROFESORES. ADOPCIÓN DE NUEVOS PLANES .................. 111

Formación de Profesores Antes de Ejercer .......... 111
Actualización del Profesorado en Ejercicio ........ 120
Adopción de Programas Nuevos ...................... 122

Bibliografía ...................................... 127

## PRÓLOGO

En 1961, el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, de Estados Unidos, publicó un folleto titulado *La Revolución en las Matemáticas Escolares*. Este folleto, traducido al español, fue publicado por la Organización de los Estados Americanos, en 1963, y tuvo una segunda edición en 1968. Contenía tres discursos principales, pronunciados en ocho conferencias regionales celebradas en Estados Unidos, en 1960; resúmenes de las discusiones habidas a continuación, a propósito de la experiencia procedente de la sala de clase; y preguntas y respuestas de los participantes en general. El objeto de las conferencias y del folleto aludidos era informar a los educadores en general de la necesidad de nuevos programas perfeccionados de enseñanza matemática.

Tanto las conferencias como el folleto cumplieron su cometido. La labor del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares ha sido, en gran medida, la causa de la puesta al día de los conceptos matemáticos, de un enfoque más preciso de la materia y de la adopción de nuevos temas y maneras de exponerlos, que ahora se hallan reflejados en la mayoría de los libros de texto de matemáticas salidos a la luz desde entonces. Sin embargo, los progresos en la enseñanza matemática no han permanecido estancados durante los diez años transcurridos desde la primera aparición de "La Revolución". Mucho de lo ocurrido durante la década 1960-70 puede llamarse correctamente la revolución continuada. Por esto, este folleto se titula *"La Revolución en las Matemáticas Escolares. Segunda Fase"*, y su propósito es llamar la atención de los educadores a las importantes e iluminadoras innovaciones hechas entre 1960 y 1970, no sólo en Estados Unidos, sino también en otros lugares del mundo. Esperamos que lo ocurrido a este respecto contribuya significativamente a mejorar la enseñanza de las matemáticas durante la década que se avecina.



Ha habido un cierto número de conferencias internacionales donde el pensamiento de los más destacados matemáticos y profesores de matemáticas han refinado gradualmente los métodos y procedimientos, tanto de las matemáticas, como de su enseñanza, con el objeto de hacer frente a las necesidades de la juventud en los años venideros. Este pensamiento constituye la base de la mayor parte de esta monografía.

De significativo interés, entre las mencionadas conferencias internacionales, fueron: a) Las dos Conferencias Interamericanas sobre Enseñanza Matemática, una celebrada en Bogotá (1961) y la otra en Lima (1966); b) la Conferencia de UNESCO sobre Ciencias y Matemáticas, celebrada en Dakar (1965); c) la Conferencia de la Organización de Cooperación y Desarrollo Económico, que tuvo lugar en Atenas, en 1963; d) la Primera Reunión de la Comisión Internacional sobre Enseñanza Matemática, de la Unión Matemática Internacional, celebrada en Lyon, Francia, 1969. Todos estos congresos contribuyeron a clarificar y definir los objetivos y contenido delos programas de matemáticas actuales.

Muchos países, mediante sus respectivos comités nacionales y por intermedio de comités privados presididos por reformadores particulares, han elaborado para sus escuelas planes de estudios completamente reestructurados. Y mientras tales planes difieren entre sí en ciertos puntos específicos, tienen tanto en común que su examen será de gran utilidad a los demás países que aspiren a la mejora de esta enseñanza. Los programas considerados de más mérito y los nombres de los educadores a que van asociados, son: a) El programa escandinavo de mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas (Håstad, Estocolmo); b) el Proyecto de Matemáticas Escolares (Thwaites), el Proyecto Midlands (Hope) y el Proyecto Nuffield (Matthews), todos ellos de Inglaterra; c) el Programa Belga (Papy); d) el Plan Chambery de Francia (Lichnerowicz); e) el Proyecto Árabe de Matemáticas, de UNESCO (Soos), y el Programa Inclusivo de Matemáticas Escolares (Kaufman), el Segundo Ciclo del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares (Begle) y el Proyecto de Mejoramiento del Plan de Estudios de las Matemáticas en la Escuela Secundaria (Fehr), de Estados Unidos.

Al examinar los nuevos programas y los nuevos libros de matemáticas de nivel avanzado, así como los escritos de matemáticos sobre la naturaleza de esta materia --los del grupo Bourbaki, por ejemplo-- se percibe una
2 organización completamente nueva de las matemáticas con respecto a la
tradicional de aritmética, álgebra, geometría y análisis. Conceptos elaborados en fecha reciente, --como conjuntos, relaciones, funciones y estructuras-- no sólo son interesantes en sí mismos, sino que combinados forman una base firme sobre la cual se pueden construir todas las matemáticas, y hasta cierto punto, unificarlas. Estos conceptos permiten una aplicación mucho más amplia de las matemáticas a otras ciencias. El estudio del desarrollo histórico del álgebra y de la geometría hasta llegar a la situación actual de ambas disciplinas --y los nuevos puntos de vista son bastante distintos de los que aún prevalecen en las escuelas secundarias--, puede mostrar de modo relevante lo que se debiera estar enseñando de estas disciplinas a la juventud que se va a incorporar al mundo de los adultos en la década venidera.

No sólo ha tenido lugar una revolución en el contenido de los programas en sí mismos, sino que también se ha revolucionado su didáctica, esto es, el arte de enseñar matemáticas y la ciencia de su aprendizaje. Se oye hablar del método del descubrimiento, del aprendizaje guiado o dirigido, del *"neobehaviorismo"*, de la instrucción individualizada, del aprendizaje por varios medios, de la enseñanza programada y así sucesivamente. Todos estos aspectos del aprendizaje y de la enseñanza tienen significado para el educador y para el profesor de una clase. En particular, desde el punto de vista didáctico, las metas a que han de llegar los diversos grupos y niveles de capacidad, vienen adquiriendo especial significación. Cuando conozcamos el tipo de producto final que se desea como resultado de la enseñanza matemática, podremos ser capaces de brindar un mecanismo perfeccionado que nos permita obtener aquello a que aspiramos.

Mucho se ha hecho en este sentido durante los diez años últimos, y hasta un derivado ecléctico de todos estos resultados puede sernos valioso para llevar a cabo nuestras tareas.

Esta *Segunda Fase* es un intento de poner al alcance del lector lo esencial de las actividades, resultados y tendencias arriba mencionados. La bibliografía ofrece referencias más amplias a quienes las deseen. Estos elementos de juicio deben al menos ser objeto de la atención de profesores, supervisores, especialistas en planes de estudio y administradores docentes interesados en la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, o sea de los 11 a los 18 años de edad estudiantil, o si se prefiere, la impartida en los años escolares 7 a 12 inclusive. Los autores se abstienen de recomendar un programa o método de enseñanza particular: presentan el material con el objeto de orientar a quienes deseen utilizarlo para intentar el mejoramiento de sus propios programas y métodos. Las tendencias son claras, inequívocas. En cualquier innovación se cometen errores, pero gracias a los errores se aprende.

# 1

## REFORMA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN TODO EL MUNDO

Antes de poder evaluar el alcance de un *nuevo cambio* o *revolución* en las matemáticas escolares es necesario formarse una idea clara del significado del calificativo "tradicional" o "clásico", en contraste con el "moderno" o "contemporáneo". En este capítulo el concepto "tradicional" se define en función de su aplicación a las matemáticas y a su organización para la enseñanza escolar. A continuación se pasa revista a lo tratado en conferencias importantes y a aquéllos de sus resultados cuya influencia ha sido de especial significación como causa de cambio, o bien han marcado el rumbo de éste en los programas escolares. En los capítulos subsiguientes se traza la reevaluación histórica de la naturaleza del álgebra, de la geometría y de otras ramas de las matemáticas, que condujo a una organización y estructura de las matemáticas denominadas "modernas". Este nuevo punto de vista se refleja entonces en la elaboración de nuevos programas escolares, algunos de los cuales, junto con los cambios afines requeridos en la formación de profesores, constituyen el tema de los capítulos finales.



## LA ORGANIZACIÓN CLÁSICA DE LAS MATEMÁTICAS

Tradicionalmente, las matemáticas nacieron de la necesidad de entender el mundo físico circundante, y así surgieron sistemas de contar y de medir (los números enteros y los racionales) y una idealización del espacio físico al alcance de los sentidos (la geometría euclidiana). Ulteriores investigaciones y generalizaciones llevaron a disciplinas más abstractas denominadas álgebra y análisis. Hace más de trescientos años el desenvolvimiento gradual de estas disciplinas condujo a la organización tradicional del contenido de las matemáticas en cuatro ramas principales: aritmética, álgebra, geometría y análisis, cada una de las cuales se consideraba un campo de investigación cerrado y aislado. Dentro de cada una de ellas tuvo lugar una proliferación de aspectos más o menos independientes entre sí. Por ejemplo, bajo el epígrafe de la aritmética se fue perfilando la teoría combinatoria, el análisis diofántico, el cálculo numérico, el cálculo de probabilidades, la teoría de números, la estadística, la nomografía y así sucesivamente. Lo mismo sucedió en las otras tres ramas, como muestra a continuación la figura 1. Si a un matemático se le preguntara cuál es su especialidad, es probable que contestase: "el álgebra", o "la geometría" o tal vez "el análisis". Tal es la organización tradicional o clásica de las matemáticas.

Fue natural que la organización tradicional de las matemáticas se convirtiese en el modelo adoptado en el plan de estudios de las matemáticas escolares. Lo primero que el adulto necesitaba saber eran los rudimentos del manejo de los números para contar y calcular a los efectos de aplicarlos en sus negocios o en sus relaciones sociales. Durante los siglos XIV y XV estos conocimientos constituyeron el tema principal de las matemáticas que se enseñaban en las universidades europeas. Como consecuencia del aumento del caudal de saber que se iba incorporando a los estudios universitarios, la aritmética descendió de los escaños de la universidad a los de las escuelas secundarias, y finalmente tomó asiento al ras de los bancos de la escuela primaria. Muy pronto, la medida y la explicación del universo inmediato se convirtió en una necesidad de la vida social, y este saber práctico se fue organizando en la geometría concreta y más tarde, como una idealización abstracta del espacio, en la geometría euclidiana. Todo esto constituyó una materia de estudio universitario hasta mediados del siglo XIX, época en que pasó, como geometría sintética deductiva, a la segunda enseñanza.

| ARITMÉTICA | ÁLGEBRA |
|---|---|
| Teoría de Números | Cálculo Algebraico |
| Análisis Combinatorio | Matrices y Determinantes |
| Cálculo de Probabilidades | Teoría de las Ecuaciones |
| Nomografía | Álgebra de los Polinomios |
| Interpolación | Álgebra Superior |
| Etc. | Etc. |
| **GEOMETRÍA** | **ANÁLISIS** |
| Geometría Euclidiana | Cálculo |
| Analítica | Análisis Numérico |
| Descriptiva | Teoría de Funciones |
| Proyectiva | Ecuaciones Diferenciales |
| No-Euclidiana | Cálculo de Variaciones |
| Análisis Vectorial | Análisis Armónico |
| Diferencial | Análisis Tensorial |
| Etc. | Etc. |

Fig. 1. Estructura clásica de las matemáticas.

El álgebra fue un estudio reservado siempre a los más doctos, mas a medida que el comercio y la navegación se expandieron, se hizo sentir entre los trabajadores más educados la necesidad de fórmulas algebraicas y trigonométricas. Esta materia, al comienzo reservada a los estudiantes universitarios, descendió a los centros de enseñanza secundaria, y se le dedicaban dos o más años del plan de estudios. En cambio el análisis, el estudio del movimiento por medio de los llamados infinitesimales, no penetró en la esfera de la segunda enseñanza hasta el presente siglo. Con todo, este cúmulo de conocimiento se entendió como algo estático, prefabricado y como una representación de las matemáticas de inalterable perfección que debía pasar de una generación a la siguiente. Este saber tradicional y la forma en que estaba organizado se conservaron constantes en el plan de enseñanza de todas las escuelas del mundo desde el comienzo del siglo XX.

Son éstas las matemáticas que la mayoría de los lectores estudiaron como aritmética, geometría y trigonometría, y de las cuales obtuvieron todos el saber y la experiencia requeridos en muchos dominios de la actividad humana --en el estudio de las ciencias naturales, de la técnica, de la física y de las ciencias biológicas, así como en el estudio de las matemáticas superiores. Puede decirse que, sean cuales fueren los cambios que ocurran en el plan de estudios de las matemáticas escolares, los aspectos esenciales de los contenidos tradicionales deberán conservarse, en alguna proporción.

## MOVIMIENTOS HACIA LA REFORMA EN ESTADOS UNIDOS

Desde fines del siglo XIX y durante lo que va del siglo actual, se han dado pasos gigantescos en cuanto a la manera de concebir las matemáticas tradicionales y en cuanto a la creación de nuevos campos de exploración matemática. Esta explosión de saber matemático, iniciada en los centros de investigación de posgrado universitario, pronto fue infiltrando los programas de licenciatura de las universidades. Sin embargo, se detuvo allí, y como consecuencia se fue abriendo una brecha entre el contenido de la enseñanza universitaria de aspirantes a la licenciatura y el de las escuelas secundarias.

El primer grupo de profesores que se apercibió de la situación y trató de remediarla fue el Comité sobre Matemáticas Escolares de la Universidad de Illinois (UICSM). Y, si bien sus primeros esfuerzos tendieron a catalogar aquellos aspectos de las matemáticas considerados 7
imprescindibles para los estudios de ingeniería, pronto su atención se inclinó hacia la necesidad de poner al día los programas de matemáticas de segunda enseñanza con el objeto de adecuarlos a las ideas contemporáneas sobre la materia. Uno de los principales esfuerzos del Comité tendió a la precisión del lenguaje y a la mejora de los métodos pedagógicos de su enseñanza.

Más tarde, en 1959, la Comisión sobre Matemáticas del Tribunal de Exámenes de Ingreso en la Universidad (College Entrance Examination Board), publicó un informe donde se cita un programa de nueve puntos destinado a los estudiantes capacitados para ingreso en la universidad. En él se destaca por primera vez la aplicación de conceptos unificadores, tales como conjunto, variable, función y relación, y las nociones de estructura en el desenvolvimiento del álgebra, así como el número real y las coordenadas en el estudio de la geometría. Entre 1959 y 1962 estas propuestas sufrieron innovaciones como resultado de los esfuerzos del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares (SMSG), que publicó libros de texto nuevos, a la vez que material educativo para los profesores de los grados séptimo al duodécimo inclusive, todo ello de acuerdo con la organización tradicional de la escuela secundaria, si bien en lenguaje y símbolos actuales. La labor de este Grupo tuvo amplia acogida, como ponen de manifiesto los libros de texto publicados recientemente por las grandes editoriales.

Conseguidas al parecer la reforma y puesta al día del estudio de las matemáticas, los educadores de todo el mundo recibieron una nueva sacudida al aparecer el informe de la conferencia de Cambridge (EE. UU.), celebrada en la segunda mitad de 1963. Este informe, titulado *Metas de las Matemáticas Escolares (Goals for School Mathematics)* ofrece el pensamiento de veinticinco matemáticos de alto rango y de expertos en la aplicación de estas disciplinas respecto de un programa ideal para el futuro, excluyendo la generación venidera porque no se podría disponer en plazo tan corto de profesores calificados para enseñar dicho programa. Este programa aspira a que el alumno que haya terminado el bachillerato tenga la preparación matemática correspondiente a tres años de estudio del nivel universitario actual. Estas ambiciones parecieron excesivas, fuera de la realidad, y sin duda resultaron incomprensibles para la mayoría de los profesores de enseñanza secundaria. Sin embargo tuvieron el mérito de poner a prueba a los educadores responsables e incitarlos a cambios y reformas de mayor alcance que los conseguidos por mediación del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares (SMSG). En realidad, el informe de la conferencia de Cambridge vino a complementar y a poner de relieve movimientos similares ya iniciados en Europa.

En 1966, espoleados por los adelantos europeos y por el informe de Cambridge, tomaron cuerpo dos nuevos intentos. Uno, el Proyecto Inclusivo de Matemáticas Escolares (Comprehensive School Mathematics Project, CSMP), originado en Carbondale, Illinois, tiene por fin inmediato la elaboración de un conjunto completo de módulos de estudio de las matemáticas, adaptado a distintas capacidades individuales de aprendizaje. También se propone este Proyecto un desarrollo rigurosamente lógico de las matemáticas que abarque del séptimo al duodécimo grados inclusive de la enseñanza secundaria, destinado a alumnos excepcionalmente dotados. Este punto refleja hasta cierto punto el pensamiento del informe de Cambridge. El segundo intento se denomina Proyecto del Mejoramiento del Plan de Estudios de las Matemáticas Escolares (Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study, SSMCIS), y se organizó en 1965 en el Colegio de Profesores (Teachers College) de la Universidad de Columbia. Su programa se destina al 15% de los mejores estudiantes en cuanto a dotes matemáticas, y su objeto es reestructurar el plan de la enseñanza secundaria unificando las ramas tradicionales en un estudio escalonado e integral basado en los resultados alcanzados en fechas recientes en el campo de las matemáticas. Para ello, el SSMCIS ha utilizado las conclusiones de conferencias internacionales, así como los puntos de vista de comités nacionales y de matemáticos que invirtieron parte del tiempo correspondiente a sus tareas de investigación en este intento de reforma de las matemáticas escolares. En la siguiente sección se pasa revista a esta última labor y se la resume.



## PRIMEROS ENSAYOS EUROPEOS

El impulso inicial en pro de la reforma de la enseñanza de las matemáticas en Europa se dio en 1958, en Edimburgo, con ocasión del Congreso Internacional de Matemáticos, durante las sesiones presididas por la Comisión Internacional sobre Enseñanza Matemática (ICME). Uno de los documentos presentados sobre las matemáticas que se enseñaban a los niños entre los 6 y los 16 años de edad, y que abarcaba diez de los principales países, puso de manifiesto la total carencia de una enseñanza matemática sensata basada en conceptos modernos. A la lectura de este documento siguió una sesión en la que cinco participantes norteamericanos hicieron un informe verbal sobre la labor de la Comisión sobre Matemáticas del Tribunal de Exámenes de Ingreso en la Universidad; del Comité sobre las Matemáticas Escolares, de la Universidad de Illinois; del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares, y del Comité sobre el Programa de Matemáticas de Estudiantes de Licenciatura, de la Asociación Norteamericana de Matemáticas (Mathematical Association of America). Al terminar esta sesión, hubo tres horas de discusión adicional, en la que matemáticos europeos vocearon la necesidad de reformar los métodos empleados en las escuelas de Europa.

La mayoría de los esfuerzos europeos se llevaron a cabo con el estímulo y la ayuda económica de la Organización de Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), en aquel entonces conocida como Organización de Cooperación Económica Europea (OCEE). En el otoño de 1958, la OCDE congregó representantes de 20 países, quienes dedicaron dos semanas al estudio del programa total de matemáticas de Francia, desde la *L'École Maternelle* (edad de 3 a 5 años), hasta *L'École Normal Supérieure* (de formación de profesores). En conjunto, el programa vigente resultó ser tradicional en extremo, riguroso, selectivo e incapaz de proporcionar el número de personal, con preparación adecuada en matemáticas, para satisfacer las necesidades económicas del país. Y se estuvo de acuerdo en que lo dicho respecto a Francia era aplicable también a otros países europeos.



Como consecuencia de esta reunión, la OCDE planeó y llevó a cabo el ya famoso Seminario de Royaumont, celebrado en noviembre de 1959. El correspondiente informe, *New Thinking in School Mathematics* (Nuevo Punto de Vista sobre las Matemáticas Escolares) marcó el rumbo que, tras cinco años de refinamientos y coordinación, sirvió de base sólida para la creación de un programa de matemáticas escolares genuinamente moderno. Las conclusiones principales a que se llegó en dicho seminario se pueden resumir como sigue:

1. Lo que se necesita no es un programa de álgebra a la par de otros de aritmética, de geometría, de trigonometría y de análisis, sino un programa que combine los contenidos de aquéllos dando unidad a la matemática. Los conceptos fundamentales son los de conjunto, relación, función y operación; las estructuras fundamentales son las de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial.

2. El simbolismo moderno para conjuntos, relaciones y aplicaciones debe adoptarse tan pronto como sea posible, y aplicarse de un modo coherente y continuo.

3. Debe concederse mayor importancia al empleo de representaciones gráficas y a nuevos tipos de ellas.

4. Gran parte del álgebra tradicional, de escasa o nula aplicación en el estudio ulterior de las matemáticas, debe ser eliminada. (Se enumeran algunos temas específicos.)

5. La geometría euclidiana tradicional o sintética debe ser modificada en gran medida --e incluso eliminada-- en favor de otros métodos

de estudio del espacio. En las escuelas secundarias debe enseñarse la geometría vectorial conducente a los espacios vectoriales así como al álgebra lineal.

6. Hay que eliminar el curso aislado de trigonometría, y su contenido debe incorporarse a los programas de álgebra, de geometría y de análisis. Ofrecida de esta manera, pasa a ser una parte de la matemática unificada.

7. El análisis, el estudio de las desigualdades, límites, diferenciación, integración y funciones, deben formar parte de las matemáticas de la escuela secundaria. La manera de abordar este estudio no tiene porqué ser rigurosa en extremo, puede hacerse el planteo intuitivo y correcto. El énfasis debe ponerse en las técnicas de cálculo, apoyadas en la comprensión de la teoría en que se basan.

8. La probabilidad y la inferencia estadística, juntamente con el análisis combinatorio desde el punto de vista de los conjuntos, de funciones de conjuntos y espacios muestrales constituye un nuevo campo muy apropiado para ser tratado en la escuela secundaria.

9. Es preciso contar con un grupo de expertos compuesto de personas de distintos países al que se encomiende la elaboración de programas detallados de enseñanza matemática para escuelas secundarias.



En 1960, después de celebrado el Seminario de Royaumont, acontecieron tres hechos importantes. Como ha ocurrido desde el comienzo del movimiento en pro de la renovación de la enseñanza, el problema que suscitó mayor perplejidad fue: ¿Qué geometría debe enseñarse en la escuela secundaria? Tanto es así que esta interrogante sigue sin ser contestada aún (septiembre de 1970). La primera conferencia sobre este particular, auspiciada por la Comisión Internacional sobre Enseñanza Matemática (ICME), se celebró en Aarhus, Dinamarca, en mayo de 1960, y se dedicó a conferencias y discusiones sobre la enseñanza actual de la geometría. En ella, el profesor Choquet (Francia) presentó los lineamientos de una geometría axiomática a partir del plano afín; el Profesor Dieudonné (también francés) presentó un enfoque del estudio de los ángulos a partir del espacio vectorial: y Fenchel (Dinamarca), Pickert (Alemania) y Freudenthal (Holanda) abordaron la geometría desde el punto de vista axiomático. El solo acuerdo alcanzado a lo largo de toda la conferencia puede formularse así: de los 16 a los 18 años de edad, el estudiante debe seguir algún estudio axiomático riguroso del espacio y, en general, éste debe ser distinto del de la geometría euclidiana sintética.

En Bolonia, Italia, en 1962, tuvo lugar una conferencia similar patrocinada por la misma ICME, y otra en Houston, Texas, en 1967. Y aunque en ambas participaron personas muy distintas, se manifestaron las mismas indecisiones en cuanto a qué geometría debe ser enseñada en la escuela secundaria. Sin embargo, fue patente entre 1960 a 1967 la tendencia opuesta a dedicar un año escolar a la geometría euclidiana sintética y en favor de abordar el estudio conjunto del álgebra y la geometría a partir de los espacios vectoriales. La última conferencia de gran alcance sobre el estudio de la geometría tuvo lugar en la Universidad del Sur de Illinois, Carbondale, Ill., en marzo de 1970. Algunos de los puntos de vista expresados en esta conferencia se reseñan en el capítulo 3.

El segundo hecho importante de 1960 fue la reunión de diecisiete matemáticos europeos y norteamericanos con el objeto de precisar los contenidos y métodos propuestos en el Seminario de Royaumont. Tuvo lugar en Yugoeslavia --dos semanas en Zagreb y otras dos en Dubrovnik--, y sus resultados se publicaron en *Synopsis for Modern Secondary School Mathematics (Sinopsis sobre las Matemáticas Modernas en la Escuela Secundaria)*. No se intentó elaborar un plan ordenado de las materias, porque los matemáticos reunidos estimaron que su contribución debía ser una descripción detallada del contenido de geometría y álgebra, tanto en el ciclo inferior (grados del 7 al 9) como en el superior (grados del 10 al 12), destacando su desenvolvimiento moderno a partir de lo intuitivo-físico hasta una posible presentación axiomático-abstracta en los grados finales. En una sección separada se muestra cómo tratar las probabilidades y la estadística como una rama aplicada relacionada con las otras ramas matemáticas, a lo largo de seis años de enseñanza secundaria. Es significativo el reconocimiento de que esta sinopsis sirvió de base para la elaboración de la mayor parte de los programas ahora en uso en las escuelas europeas, sin excluir la Unión Soviética. Afirmó, además, la dirección de las ideas básicas expuestas en el Seminario de Royaumont, en 1959.



La labor del seminario de Dubrovnik representa el pensamiento más lúcido de los maestros de la investigación matemática moderna que, en muchos casos, se distinguieron al ubicarse en la vanguardia del desenvolvimiento de la materia, y lo combina con la rica y variada experiencia de pedagogos y profesores sobresalientes en la enseñanza en el nivel secundario. También nos ofrece un medio de abordar la unificación de un plan de estudios completo donde el álgebra, la geometría y elementos de análisis y matemáticas aplicadas no aparecen ya en compartimentos separados, sino en íntima y fecunda relación unos con otros.

El tercer acontecimiento del año 1960 fue la formación del "Comité Nórdico para la Modernización de las Matemáticas Escolares", ocurrida en junio y cuya primera reunión tuvo lugar en octubre del mismo año. En los países nórdicos, tanto la organización escolar como los programas han experimentado modificaciones continuas. Sin embargo, es evidente que las modificaciones del programa de matemáticas no ocurrieron paralelas ni al mismo ritmo que el desarrollo y aplicaciones de tal disciplina. Es natural, pues, que los países escandinavos, siguiendo las recomendaciones del Seminario de Royaumont en pro de la colaboración regional, llegasen a un acuerdo de mutua colaboración que implicaba varias ventajas, tales como: el intercambio de la experiencia de cuatro naciones; el lenguaje y la estructura escolar relacionados; el costo de asesores extranjeros que de este modo resultaría menor del que sería obrando por separado; y la mayor uniformidad y perfeccionamiento en los programas gracias a la cooperación entre todos ellos. Y así Noruega, Suecia, Dinamarca y Finlandia se unieron en un plan de siete años de duración durante los cuales escribirían y ensayarían libros didácticos de matemáticas de los cuales los países partícipes pudiesen beneficiarse por igual, de acuerdo con sus respectivas necesidades.

Este Comité fue apoyado económicamente con subvenciones de la OCDE, de organizaciones obreras e industriales y de los gobiernos de los propios países. La labor de los dieciséis miembros del Comité, cuatro de cada país, se realizó en el orden siguiente: En primer lugar se esbozaron los programas, se revisaron y aprobaron. A continuación fueron escritos los textos experimentales; se entrenaron los profesores y se procedió a enseñar lo escrito en clases experimentales. A partir de la experiencia resultante, los textos se modificaron de manera conveniente. En 1967 se publicó en sueco un informe final. Cada país elaboró entonces sus respectivos programas y libros de texto basándose en los textos experimentales finales. Como resultado de todo esto, los mejores estudiantes de los gimnasios o escuelas de segunda enseñanza de estos países disponen hoy día de los programas de matemáticas más modernos y adelantados del mundo. De este punto se volverá a hablar en el capítulo 5. ¿No podría una colaboración parecida de países de otras partes del mundo conducir a las mismas mejoras de sus planes de estudio de matemáticas?

## OTRAS REFORMAS DE ALCANCE NACIONAL



Tal vez no haya en toda Europa un nombre que haya atraído tanto la atención de los profesores de matemáticas del resto del mundo como el de *Papy*. George Papy es actualmente profesor de matemáticas en la Universidad Libre de Bruselas, a la vez que Director del Centro Belga de Pedagogía Matemática. Este Centro fue fundado, como una institución privada, por Papy y su esposa Frederique, en 1961, mediante una subvención del Ministerio de Educación belga. En 1964, el Centro estaba sólidamente constituido con el carácter de una institución dedicada a la investigación experimental de la enseñanza de la matemática y, más tarde, con el de Centro de Investigación Científica. Hoy día, no sólo es un órgano de investigación pedagógica, donde se preparan investigadores de otros países, sino que también desarrolla cursos de perfeccionamiento para profesores en ejercicio en toda Bélgica. Prepara profesores para enseñar matemáticas secundarias de acuerdo con el plan y programas por él elaborados. Estos cursos son gratuitos, si bien los profesores que los siguen pagan sus gastos de viaje y el material.

Papy empezó su labor en 1958 enseñando a los profesores de kindergarten nociones sobre conjuntos, relaciones y topología a fin de que tuviesen cierto conocimiento previo a los de número, operación y figuras espaciales. Se vio que estas ideas, convenientemente expuestas, se hallan dentro de la esfera de interés del niño, y de este modo empezó la experimentación con las matemáticas enseñadas en la escuela primaria, que prosigue hoy. En 1961, Papy se interesó por la enseñanza matemática de los niños de primer año de enseñanza secundaria (de 12 años de edad), o sea el séptimo año de enseñanza, y de esta manera empezó la elaboración de un plan de enseñanza de matemáticas para los centros secundarios. Si bien influenciado por la labor llevada a cabo en Chicago por Northrop, de 1942 a 1947, por la ICME, y más tarde por los informes de la OCDE, así como por su propia Comisión de Programas, compuesta de profesores universitarios, inspectores de matemáticas, jefes de departamento de escuelas de matemáticas y de profesores, Papy en persona fue el arquitecto principal que diseñó dicho plan de estudios.

En 1961 se inició un programa de tres años con una clase experimental de séptimo grado en la Escuela Normal de Berkendael, que terminó en 1964. La clase de matemáticas se dio a razón de cuatro sesiones por semana, de cuarenta y cinco minutos de duración cada una. A partir de 1964, se empezó la experimentación en el segundo ciclo de secundaria *(senior high school* de EE. UU.) a razón de siete clases por semana y cuya duración seguía siendo de cuarenta y cinco minutos cada una. A partir de estos experimentos, en 1969 se logró fijar la secuencia de los cursos correspondientes a este ciclo. Este plan de enseñanza de matemáticas secundarias es uno de los más modernos de cuantos se han puesto en vigor hasta la fecha.

En Inglaterra empezó en 1962 un movimiento de reforma denominado Proyecto de Matemáticas Escolares (School Mathematics Project), puesto en marcha por Bryan Thwaites. De un grupo de maestros de escuela surgió la creencia de que había serios defectos en los programas tradicionales de matemáticas del país, y la convicción de que era necesario iniciar la experimentación en las clases a fin de llevar a cabo la revisión de dichos programas en consonancia con el estado actual de las matemáticas y sus aplicaciones. Un grupo de ocho escuelas --la mayoría escuelas primarias *(English grammar schools)*-- y sus respectivos profesores de matemáticas, decidieron aunar sus esfuerzos con el propósito de escribir, y luego revisar, en caso necesario, libros de texto que diesen en lo posible cabida a las nuevas ideas matemáticas. De aquí resultó la publicación de libros para cada uno de los seis "niveles" (estudiantes de 11 a 18 años) que inyectan nuevos conceptos y contenido en los programas tradicionales. En estos textos se mantiene la mecánica newtoniana como una parte de las matemáticas, y cabe decir que son menos radicales que los procedentes de otros proyectos europeos.



En 1962, un grupo inició en Inglaterra un experimento de mayor alcance que el anterior, llamado Experimento Matemático de Midlands (Midlands Mathematical Experiment). Tras los impulsos iniciales dados por un pequeño grupo de educadores y profesores interesados en el asunto, bajo la dirección de Cyril Hope, quienes contribuyeron con tiempo y hasta con dinero, los esfuerzos de este grupo recibieron atención nacional (y hoy atención internacional) debido a su visión comprensiva de la enseñanza matemática para todos los niños. En la actualidad recibe ayuda económica del Consejo Escolar (Schools Council), un organismo gubernativo. Una de las características principales de los libros de texto producidos es la de abarcar una escala de aptitudes o disposiciones mucho más amplia que la contemplada en otros programas nuevos de matemáticas. Otra, su manera de entretejer contenido y métodos de enseñanza. El plan requiere investigación y experimentación de parte del alumno. Por ejemplo, la geometría vectorial se presenta a partir de la navegación; el cálculo diferencial a partir de funciones en escalera, y el cálculo de probabilidades parte de ensayos y eventos en un juego de azar. La primera fase de este experimento llegó a su culminación en el verano de 1968, momento en que comenzó el intento de redactar otros libros de texto adaptados a estudiantes que revelan distintas aptitudes en su paso del nivel tercero al quinto.

En Suramérica el movimiento en pro de la reforma de las matemáticas escolares empezó ya en 1960, cuando los libros de texto del Grupo de Estudio de las Matemáticas Escolares (School Mathematics Study Group) llegaron a conocimiento de los matemáticos interesados en el asunto. Justo es señalar que en varios países, en especial Brasil, Argentina y Perú, se habían organizado ya departamentos de investigación para graduados o institutos de matemáticas. Un poderoso estímulo de este movimiento fue la Primera Conferencia Interamericana sobre Enseñanza Matemática, celebrada en Bogotá en 1961. Por falta de coordinación entre los países y a consecuencia de dificultades internas de índole económica o social, no fue posible un planteamiento de nuevos planes y programas al mismo ritmo que tuvo lugar en otros países. Sin embargo, la Segunda Conferencia Interamericana, celebrada en Lima, puso de relieve un progreso considerable en la adopción de nuevos conceptos, y enfocó su atención en tres problemas principales: 1) requisitos de admisión de los estudiantes en la universidad; 2) adecuada preparación de los profesores de matemáticas de las escuelas secundarias, y 3) análisis del estado de la revisión de los programas.



Los discursos, discusiones, conclusiones y recomendaciones de esta conferencia se publicaron en español, inglés y portugués, y se repartieron ampliamente entre las universidades y ministerios de educación de los países latinoamericanos. Tres fueron los efectos principales de esta segunda conferencia. El primero consistió en el establecimiento de un Comité Interamericano de Enseñanza Matemática, cuya labor debía comenzar en 1967. Para presidente se nombró a Marshall Stone, de Estados Unidos, y Luis Santaló, de Argentina, fue elegido para representarlo en lo que respecta a la labor del Comité en Suramérica. El segundo efecto fue la elaboración de un índice de temas para el plan de estudios de matemáticas tanto del ciclo inferior (de 12 a 15 años) como del superior (de 15 a 18 años) de la enseñanza secundaria, que serviría de base a la estructuración y renovación de todos los programas de matemáticas en todos los países suramericanos. Finalmente, se diseñaron los medios y programas a seguir en la formación y perfeccionamiento de profesores, y de libros de texto y materiales para la enseñanza.

## MOVIMIENTOS SIGNIFICATIVOS A PARTIR DE 1964

La conferencia más decisiva de la década 1960-69 fue la celebrada en Atenas, en noviembre de 1963, y se trató del seminario final convocado por la OCDE sobre la enseñanza de las matemáticas con el objeto de reunir todo lo aprendido en seis años de experimentación y de utilizarlo como piloto en los años subsiguientes. El informe de esta conferencia se titula *Matemáticas de Hoy, Una Guía para Profesores*, y contiene las comunicaciones principales, así como las discusiones y conclusiones. Fue en esta conferencia donde emergió claramente el contenido que debe abarcar todo plan de estudios de las escuelas secundarias, y cómo éste se debe organizar en una sucesión pedagógicamente bien articulada.

La experiencia del Comité Nórdico (Håstad), las reformas de Bélgica dirigidas por Papy y Servais, la labor llevada a cabo en Estados Unidos bajo la dirección de Beberman (UISCM), de Begle (SMSG) y de Pollak (Laboratorios Bell); el experimento inglés dirigido por Thwaites (SMP), las innovaciones hechas en Suiza (Pauli) y en Alemania (Steiner), así como nuevos experimentos hechos en España (Abellanos), Francia (Revuz) e Italia (Viola); llevaron a un consenso general sobre lo que debe ser el plan de estudios de matemáticas durante lo que resta del siglo XX. Al comenzar la conferencia se describieron en detalle muchos de los nuevos programas; pero en las sesiones finales se citaron en especial la lista de temas del contenido de un curso, presentada por Servais, y el plan del Gimnasio danés como dos ejemplos fascinantes de espíritu moderno, que hay que poner a prueba experimentalmente en tantos países como sea posible. La lista de temas y el plan danés figuran en el capítulo 5.

En 1962, se inició, patronizado por UNESCO, la primera evaluación en escala internacional de lo conseguido en matemáticas. Esta evaluación constituyó un intento de poner de manifiesto el adelanto relativo de las matemáticas correspondientes al octavo grado (alumnos de 13 años) y al grado duodécimo (alumnos de 17 años). En la comparación final intervinieron los once países siguientes: Australia, Bélgica, Inglaterra, Finlandia, Francia, Alemania, Holanda, Japón, Escocia, Suecia y Estados Unidos.



La realización de las pruebas de evaluación fue precedida de tres años dedicados a su planeamiento y al estudio de los medios para realizarlas; a la obtención de datos sobre los estudiantes y sus padres y sobre el plan de estudios de matemáticas de cada uno de los países mencionados; a la búsqueda de muestras representativas de todos los grados de aptitud y de todos los niveles económicos, así como a otros varios problemas relacionados. Las preguntas concernientes a los dos grupos de edad, se obtuvieron de los más destacados profesores de matemáticas de los once países, y estas preguntas fueron finalmente presentadas a un grupo de tres expertos de distinta nacionalidad para que las revisaran, refinaran e hicieran la selección final. Las pruebas se realizaron de enero a junio de 1964, y todo lo relativo a esta operación y a la calificación y evaluación de las respuestas fue tan imparcial, público y equitativo como era posible. Fueron elegidos los niños de 13 años porque en los países objeto de la evaluación es obligatoria la enseñanza hasta dicha edad por lo menos. La puntuación máxima correspondiente a esta edad fue 70. A continuación se indica la puntuación promedio obtenida por cada uno de los países comprendidos en la apreciación final.

| País | Número de niños | Puntuación promedio |
|---|---|---|
| Japón | 2.050 | 31,2 |
| Bélgica | 1.686 | 27,7 |

| | | |
|---|---|---|
| Finlandia | 747 | 24,1 |
| Holanda | 429 | 23,9 |
| Australia | 2.917 | 20,2 |
| Inglaterra | 2.949 | 19,3 |
| Escocia | 5.256 | 19,1 |
| Francia | 2.409 | 18,3 |
| Estados Unidos | 6.231 | 16,2 |
| Suecia | 2.554 | 15,7 |
| Total | 27.228 | 19,8 |

Hay que tener en cuenta que la prueba fue difícil, pues el promedio de respuestas correctas fue 20 de un total de 70 correspondiente a este grupo. Las razones de la posición final de los países han sido debatidas tanto dentro como fuera de cada uno de los países, pero no hay una interpretación general a partir de los datos recogidos que muestre superioridad ya sea en la preparación de los maestros como en el plan de estudios seguido.

El informe de este primer experimento de aplicación de pruebas en escala internacional se halla en los dos volúmenes de *Estudio Internacional de Resultados en Matemáticas (International Study of Achievement in Mathematics)*. (Véase la Bibliografía.) Se trata de un estudio primero en su clase, que da la pauta para otros similares sobre otras materias de enseñanza comunes a los planes de estudio de muchos países.



UNESCO, juntamente con la Comisión Internacional sobre Educación Científica, patrocinó otra conferencia dedicada especialmente a los países en curso de desarrollo y celebrada en Dakar, Senegal, en enero de 1965. El informe de la misma con respecto a las matemáticas está publicado por UNESCO con el título *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de las Matemáticas*, Vol. I, 1966 (New Trends in Mathematics Teaching, Vol. I, 1966). En esta conferencia, como era de esperar, se destacaron las aplicaciones de las matemáticas, especialmente en las demás ciencias. Es de advertir que después de diez años de preocupación por la reforma de la enseñanza matemática en lo que se refiere a contenido, la atención se desplazó ahora hacia dicha enseñanza entendida como medio indispensable de estudio de otras disciplinas. Esta preocupación subsiste todavía y se manifestó constantemente en todas las conferencias celebradas en fecha reciente. El resumen siguiente da idea del consenso alcanzado en la conferencia de Dakar.

I. En el plano escolar es cosa del pasado la enseñanza de cursos de matemáticas específicos a cada oficio, vocación o carrera profesional. En estos cursos las matemáticas se consideraban como un mero instrumento y no como una estructura de conocimientos y una manera de pensar a través de la cual las matemáticas hacen su máxima contribución a la cultura.

El programa aprobado se caracteriza con tres palabras: moderno, abstracto y aplicado. La mayoría de los aspectos *modernos* son una nueva interpretación y conceptualización de las matemáticas tradicionales. La palabra *abstracto* se aplica en dos sentidos por lo menos. El primero se refiere a la abstracción de los conceptos matemáticos por generalización a partir de situaciones físicas o concretas; el segundo significado se refiere a elementos "carentes de sentido" por sí mismos, si bien adquieren significación por medio de la estructura de que forman parte, como en los grupos, cuerpos o categorías. Así, al decir sea $\xi$ un conjunto de elementos, éstos son entidades abstractas. En cuanto a la palabra *aplicado*, también tiene por lo menos dos significados. El primero de ellos entra en juego cuando mostramos como una teoría matemática deductiva se puede aplicar en la explicación de casos o ejemplos de dicha teoría. Por ejemplo, una vez desarrollada la teoría de las sucesiones, se la puede utilizar para hallar el límite de la sucesión particular $1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, \ldots$ . El segundo significado se ilustra mediante la construcción de un modelo matemático de una situación física o no matemática, como por ejemplo la aplicación de la sucesión de Fibonacci a la formulación de una teoría de la filotaxis. Esta es la interpretación más común de matemáticas aplicadas.

II. Los tres aspectos de las matemáticas se reflejan en la sinopsis siguiente:

a. Escuela Elemental: Reconocimiento de conjuntos; números cardinales; orden; sistemas de numeración; operaciones con conjuntos y con números; fracciones y números racionales; medidas; graduación de semirrectas; notación decimal de racionales; porcentajes; racionales negativos; espacio físico euclidiano; figuras planas más comunes; regiones del plano y del espacio; sólidos más comunes; medición de longitudes, de superficies y de volúmenes; aplicaciones prácticas y solución de problemas.

b. Escuela Secundaria: Conjuntos de números y puntos; relaciones, funciones; representaciones, los sistemas de números N, Z, Q, R y C y sus propiedades; relaciones de equivalencia y de orden; estructuras algebraicas de grupo, anillo y cuerpo; solución de ecuaciones y de inecuaciones de una y de dos incógnitas en una estructura dada; aplicaciones sencillas a la programación lineal; vectores; geometría de dos y de tres dimensiones; espacios vectoriales; álgebra lineal; combinatoria; probabilidad; estadística; cálculo; análisis numérico; computador digital. A lo largo de este programa se recurre a los métodos gráficos. Las aplicaciones prácticas motivan el estudio en todo momento.

III. Modificaciones para la Enseñanza en Masa. Las sinopsis propuestas parecen ser bastante rigurosas, y están destinadas a la especialidad científico-matemática en la escuela secundaria. Sin embargo, los mismos temas, modificados tanto en profundidad como en grado de abstracción, deben entrar a formar parte del programa general de la masa de estudiantes. Es posible organizar una sucesión de temas que expuestos según el espíritu de las estructuras modernas sean, sin embargo, aplicables en mecánica, en la técnica, en los negocios y en otros terrenos similares, de modo que cualquiera que sea la fase en que los estudiantes den por terminada su enseñanza, los conocimientos adquiridos sean a la vez útiles e interesantes.

IV. Formación de Profesores. Una simple mirada al programa propuesto basta para convencer a cualquiera de que el profesor tiene que poseer una preparación sólida en todos los temas y en un plano mucho más elevado que el de la clase que enseñe. Hay que advertir bien que en el ámbito de las estructuras modernas no hay cosas tales como matemáticas para escuela secundaria, matemáticas universitarias y matemáticas superiores, sino esencialmente, *una sola especie de matemáticas,* que se estudian de una manera continua, si bien con distinto grado de profundidad. En consecuencia, sea cual fuere la categoría del centro donde se estudien las matemáticas, las ideas fundamentales son las mismas, y sólo varían la amplitud, la profundidad, el grado de abstracción y el rigor lógico con que se tratan. Además del dominio de la materia en sí, el profesor debe estar versado en psicología del aprendizaje, en la naturaleza del saber y en la metodología especial de la enseñanza de la matemática. Tanto el estudio de la materia como el de su metodología son cosa obligada para el profesor durante su vida activa como tal.

V. Las Matemáticas en las Demás Ciencias. En general, se convino en la Conferencia que la manera actual de concebir las matemáticas es la más útil y la que mejor se aplica al estudio de otras ciencias. La enseñanza de las ciencias debe hacerse por aproximaciones sucesivas. En cada fase, ciertas partes de cada materia deben enseñarse con toda la exactitud y rigor posibles, en tanto que otras partes deben formularse intuitivamente con miras a sus aplicaciones prácticas. El profesor debe distinguir entre estos dos aspectos. En la medida de lo posible el orden de exposición de los temas de matemáticas debe ser elegido de acuerdo con la ordenación de los temas en la enseñanza de las ciencias. Como ejemplo de esto, el profesor de física (no el de matemáticas) de enseñanza secundaria prepara las dos tablas siguientes, la primera de matemáticas, la segunda de física.



Los grupos A y A-1 han de ser objeto de exposición o estudio riguroso, mientras los B y B-1 se expondrán de un modo intuitivo o empírico.

**Matemáticas**

| A-1 | B-1 |
|---|---|
| Teoría de conjuntos | Números reales |
| Relaciones | Gráficas |
| Teoría de grupos | Primitivas |
| Enteros | Exponenciales |
| Números complejos | Logaritmos |
| Trigonometría | Regla de cálculo |
| Espacios vectoriales | Funciones vectoriales |
| Cálculo | Programación lineal |
| Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes | Probabilidades |
| Grupos lineal y homográfico | Estadística |
| Geometría analítica | |

Física

A

Fuerza, potencia
Optica geométrica
Geometría de las vibraciones
Interferencia
Longitud de onda
Efecto Doppler
Velocidad, aceleración
Fuerza centrífuga
Oscilador lineal
Electricidad
Gas perfecto
Corrientes alternas
Astronomía, leyes de Kepler y de Newton

B

Trabajo, diferencia de potencial
Calor, temperatura, calor específico
Solidificación
Vaporización
Ondas en óptica
Espectroscopia elemental
Teoría atómica
Absorción, emisión
Ley de Stefan
Física nuclear, $E = mc^2$
Acústica, cuerdas, tubos
Máquinas térmicas
Conversión de energía
Astrofísica

VI. Matemáticas y Desarrollo Económico. Es evidente que mientras los investigadores buscan el saber por el saber mismo, no es ésta la razón principal de la importancia y del amplio interés que las matemáticas han adquirido en estos tiempos. Son más bien sus aplicaciones y la manera en que éstas han cambiado la sociedad de que formamos parte lo que las ha colocado en el primer plano de la atención del público en general. Las matemáticas desempeñan un papel fundamental, aunque *indirecto,* en el desarrollo económico por el simple hecho de ser un factor decisivo de la preparación científica y técnica de los ingenieros, físicos, químicos, biólogos y otro personal científicamente capacitado que la economía demanda con urgencia. Por estas razones el desarrollo económico en grado óptimo demanda investigadores científicos y matemáticos en número creciente. Sin embargo, las matemáticas también desempeñan un papel *directo* en el desarrollo económico. Los análisis, la toma de decisiones, la planificación y la gerencia de empresas son cosas del pasado si no se cuenta con técnicas matemáticas muy complejas y refinadas y con eficaces y costosos instrumentos de computación para aplicarlos de manera efectiva a situaciones reales. Esto es válido tanto si se trata de países de escaso desarrollo industrial, como de los que se hallan altamente industrializados.

En este resumen general del congreso de Dakar se perciben los efectos de todas las conferencias previas y esfuerzos nacionales, y en especial del seminario de la OECD de Atenas. Con creciente claridad se va perfilando el cuadro de las reformas necesarias en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias.

En la U.R.S.S., las matemáticas y las ciencias ocuparon, desde 1935, un lugar preponderante en los programas educativos. Hoy día estas disciplinas absorben el 40 por ciento del total del tiempo escolar.

Por colaboración de la Academia de Ciencias, a la que pertenecen todos los famosos académicos, y de la Academia de Ciencias Pedagógicas, donde se lleva a cabo toda la investigación sobre psicología, planes de estudio y aprendizaje, la enseñanza de la matemática ha sido objeto de experimentación y de ajuste constantes. Sin embargo, el programa, aunque riguroso, se ha mantenido en buena medida en la línea tradicional hasta la intervención de matemáticos tan famosos como Gnedenko, Markuschevitch, Kolmogorov, Jaglom y otros. El cambio que se viene madurando se puede describir mejor citando declaraciones hechas en 1965, 1967 y 1968, las cuales reflejan también movimientos similares en el resto del mundo.

En un libro de ensayos sobre enseñanza matemática, escrito en 1965, tras discutir las reformas en curso en otras partes y la necesidad de un plan de estudios mejor articulado en Rusia, Markuschevitch dice:

"En estos momentos se halla en proceso la elaboración de un nuevo plan básico de estudios para la masa de los estudiantes.... Las matemáticas no son para nosotros una simple conglomeración de juegos con condiciones más o menos arbitrarias. Son una ciencia de relaciones excepcionalmente generales en el mundo real, que son independientes de la naturaleza de las cosas... . Los conceptos y principios matemáticos más simples, así como el reconocimiento de cambio en el mundo de cada día han de ser tenidos en cuenta para la instrucción en las escuelas. Lo esencial del contenido debe por lo tanto abarcar los sistemas numéricos fundamentales, en especial los de los números enteros, racionales y reales, ecuaciones lineales y cuadráticas, coordenadas y representaciones gráficas, vectores, movimientos en el espacio, congruencias y semejanzas, funciones elementales y el cálculo, con sus aplicaciones a la física y a la geometría".



"Los conceptos generales y unificantes, tales como relación, grupo, cuerpo, espacio lineal, etc., no servirán de punto de partida en este plan de estudios, si bien serán tenidos en cuenta como resultados a que se llega mediante una acumulación de hechos que desembocan en generalizaciones. Una excepción de lo dicho es el concepto de conjunto, porque al comienzo de su vida escolar el niño ha adquirido ya suficiente experiencia para contestar preguntas sobre conjuntos y hacer con ellos operaciones simples".

A continuación, Markuschevitch bosqueja un programa de cálculo algebraico, geometría euclidiana, trigonometría, geometría del espacio y cálculo con una variable como típico del plan que tiene en mente. No figuran en él las estructuras algebraicas ni otra geometría que no sea la del espacio euclídeo. Pero dos años más tarde, en 1967, dice lo siguiente:

"El problema de una adaptación de las ideas de Bourbaki a la formulación de la instrucción matemática para las escuelas requiere atención especial. No hay, con seguridad, serias dificultades en la elaboración de un plan de estudios de matemáticas, de varios años de duración, de acuerdo con los conceptos fundamentales: conjuntos, relaciones (en particular las de función y transformación geométrica, equivalencia y orden), operaciones algebraicas (en relación con los conceptos de grupo y cuerpo), orden y espacio (en particular, espacio métrico y lineal, que se caracteriza, se ilustra y explica copiosamente mediante ejemplos). Sin duda el estudio seriado de este plan se puede hacer interesante y concreto al estudiante, aun cuando es de esperar que éste considere muchos de los temas como un mero entretenimiento. Finalmente, si dicho plan contiene suficientes preguntas, práctica y ejercicios, puede ofrecer un rico material para la educación y desenvolvimiento de aptitudes y hábitos de actividades intelectuales que en estos momentos cabe esperar de toda persona medianamente educada. También, como puede verse, se esta manera se *pueden llenar los requerimentos de de una educación general*".

¡Vaya cambio de filosofía pedagógica en un lapso de sólo dos años! ¿Qué lo produjo? No es fácil de adivinar, pero, por cierto, todas las actividades de Europa Occidental enumeradas tuvieron que ejercer una influencia eficaz en este cambio de perspectiva.

Como para ablandar la brusquedad de esta conversión, Markuschevitch añade:

"La interrogante cardinal que surge ante nosotros es: si estas ideas y conceptos generales pasan a ocupar la posición céntrica en la enseñanza matemática de las escuelas, ¿no se eliminarán las condiciones bajo las cuales se adquirieron hasta la fecha todos aquellos conocimientos y saber que se requiere para muchas esferas de la actividad humana, en el estudio de las ciencias e incluso en el estudio ulterior de las matemáticas mismas, o sea su contenido tradicional? !!! Sin más comentarios, nosotros estamos de acuerdo que, sean cuales fueren los cambios del plan de estudios, el contenido tradicional ha de figurar en él bajo una u otra forma".

Todavía no está dispuesto a echar por la borda el álgebra y la geometría que nos legaron nuestros mayores. Sin embargo, en la primavera de 1968, en un artículo de crítica de la geometría euclidiana ya pasada de moda y todavía enseñada en las escuelas, I. M. Jaglom remachó el clavo en pro de un programa moderno, al escribir:

"Hemos observado ya que el sistema en que se funda la geometría de Euclides, que mejoró el sistema axiomático de Hilbert, no se utiliza en serio en nuestros días ni en matemáticas puras ni aplicadas (con la excepción de un grupo muy pequeño de especialistas dedicados al estudio de los fundamentos). Por otra parte, la aplicación de los espacios vectoriales resulta extraordinariamente útil. Esta aplicación ha penetrado en fecha reciente en muchos terrenos nuevos de la ciencia, en la tecnología, en física y en biología. Recuerdo que uno de los primeros ejemplos de espacio vectorial fue el denominado *espacio de colores*, que se relaciona con la fisiología de las sensaciones visuales y, en economía, con la programación lineal, por ejemplo. Así pues, se puede afirmar que el concepto de espacio vectorial forma parte del bagaje científico de toda persona culta. Justamente esta circunstancia, que fue objeto de mucha actividad en los países occidentales, fue la que movió en esta dirección la tendencia modernizadora de la geometría escolar. Uno de los más destacados representantes de esta nueva orientación es el matemático francés Jean Dieudonné. Es el autor de un libro, *Álgebra Lineal y Geometría Elemental*, donde defiende con ardor la idea de que no puede haber una geometría elemental divorciada del álgebra lineal o de los espacios vectoriales. El matemático belga, George Papy, introduce el concepto de espacio vectorial en su primer libro, destinado a los niños belgas de edad comprendida entre los 12 y los 13 años. El segundo libro para niños de 13-14 años está dedicado por entero a dicho espacio vectorial. Es evidente que en Rusia con dificultad se hallará un representante de este punto de vista extremo, *pero esto no debe disuadirnos de dedicarle seria atención*".

Lo anterior indica claramente que los rusos están alerta a lo que se viene haciendo en las escuelas europeas. Bajo la dirección de Kolmogorov, a partir de 1966, los rusos han venido seleccionando material genuinamente moderno para sus libros de texto destinados a las escuelas de ciencias de nivel secundario. Este material es muy similar al del Comité Nórdico, al del plan de Papy y al del SSMCIS, de Estados Unidos. Estos tres planes se describen en el capítulo 5.

*

* *



En noviembre de 1966, la Conferencia General de UNESCO, reconociendo la importancia de la enseñanza de las ciencias como instrumento de progreso de la tecnología y de sus aplicaciones al desenvolvimiento económico, recomendó a dicha organización que, en estrecha colaboración con los países en ella representados, acometiese un programa de expansión y mejora de la enseñanza de las ciencias en general y de las matemáticas en particular en todos los niveles de la enseñanza. Anteriormente, en una conferencia de Ministros de Educación y de los Ministros Encargados de la Planificación Económica en los Países Árabes, celebrada en Trípole, en abril de 1966, se llegó a la siguiente conclusión:

"Uno de los problemas más serios que enfrentan casi todos los estados árabes en los momentos actuales es el de la calidad de la enseñanza. Los planes de estudio de las escuelas no se adaptan a las necesidades presentes de desenvolvimiento tanto económico como social. Los métodos de enseñanza se caracterizan por una memorización casi mecánica del contenido de los programas antes que por la aplicación del pensar por cuenta propia de los alumnos y de sus dotes creadoras. Con frecuencia los libros de texto no son satisfactorios y se hallan atados al lastre de un sistema de exámenes anticuado. En cuanto a las mejoras, hay que dar preferencia a las materias de enseñanza más convenientes para formar una sociedad árabe a tono con los tiempos en que vivimos, en especial a las matemáticas, a las ciencias físicas puras y aplicadas y a las lenguas extranjeras".

Puesta la mente en estas dos conferencias, UNESCO, en 1967, inició el Proyecto Árabe de Matemáticas. La razón de esta preferencia por las matemáticas radica en la circunstancia de ser éstas el objeto de especial atención en la reforma del plan de estudios de los países más adelantados. El objetivo del Proyecto fue ayudar a los estados árabes en sus esfuerzos en pro de la mejora de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, y de ajustarla a la manera de pensar contemporánea.

Para poner el Proyecto en marcha, en cada estado árabe donde el inglés es la segunda lengua, se formó un grupo permanente de expertos en matemáticas, denominado Grupo Nacional de Estudio (de las Matemáticas). Los miembros del grupo de cada país eran representantes del Ministro de Educación correspondiente, matemáticos, profesores universitarios de matemáticas, profesores de matemáticas de escuelas normales o sus equivalentes, profesores de segunda enseñanza y consultores en enseñanza de las ciencias. La organización del Grupo y la puesta en marcha de su labor estuvo a cargo del experto en matemáticas de la División de la Enseñanza de las Ciencias, de UNESCO. La labor inicial consistió en un compendio estadístico de la cantidad y calidad de la enseñanza matemática en cada país. Estos datos están recogidos en un informe titulado *Matemáticas Escolares en los Países Árabes* y refleja la situación correspondiente a 1968.

Durante el otoño de 1968, un consultor pasó unos cinco días en cada uno de los siete países árabes, dedicado a reuniones con el respectivo Comité Nacional y a conversaciones con profesores de la universidad y de escuelas normales y con otros grupos de personas relacionadas con lo sucedido a los distintos movimientos de reforma de la enseñanza de las matemáticas alrededor del mundo. Además, ante cada grupo nacional, hizo un bosquejo de los estudios llevados a cabo con relación a los planes de estudios y a los libros de texto publicados en Europa y en Estados Unidos con carácter experimental. Al mismo tiempo, el consultor se refirió al estudio de las matemáticas en las universidades y escuelas de formación del profesorado. Toda esta labor precedió a la convocatoria de un seminario de todos los grupos de estudio nacionales, cuyo objeto era fijar el comienzo de la reforma en los estados árabes.



En marzo de 1969, todos los grupos de estudio nacionales de diez estados árabes se reunieron en Cairo en un seminario regional con el fin de consolidar en un plan de acción la labor y el resultado de los estudios previos. Tras un cierto número de comunicaciones sobre álgebra, geometría, lógica, análisis y probabilidades, el seminario consideró estos tres problemas principales: 1) paso de los alumnos de segunda enseñanza a los centros de nivel universitario; 2) redacción y publicación de libros de texto y elaboración de otros medios de enseñanza destinados a preparar a los estudiantes para estudios universitarios de índole superior, y 3) formación de profesores, antes de ingresar a la enseñanza o ya en servicio, para acometer su labor con éxito y entusiasmo de acuerdo con un plan de estudios moderno. El seminario consideró que si bien sería conveniente iniciar la reforma en la escuela primaria, en el caso de los estados árabes tal intento resultaría de una lentitud exasperante. En consecuencia, la primera fase de la reforma se enfocó hacia la enseñanza secundaria o grados 10, 11 y 12, a fin de obtener tantos candidatos como fuese posible para ingreso en las universidades, desde donde retornarían más tarde como profesores bien equipados, a las escuelas elemental, preparatoria y secundaria para intensificar y proseguir la reforma. Al mismo tiempo, se seleccionaría un pequeño número de licenciados en matemáticas para que continuasen sus estudios en el extranjero, terminados los cuales, regresarían a sus respectivos países para rejuvenecer los planes de estudios universitarios y prestar servicios como especialistas en matemáticas.

Un cuarto problema, el de poner en efecto las conclusiones del seminario, de poner en conocimiento del Ministro de Educación y del público en general la necesidad de tales reformas y la necesidad de su apoyo, condujo a la propuesta de una Comisión Árabe sobre Matemáticas. Esta Comisión está en curso de constituirse y servirá para apoyar los esfuerzos reformadores en todos los estados árabes.

Las consecuencias importantes de este seminario fueron dos orientaciones generales para un programa experimental, las cuales, por fin, convergieron en la aprobación de un plan destinado a los grados 10-12 inclusive. Este plan se ha resumido en un diagrama de flujo donde se citan diez temas y su desarrollo escalonado a lo largo de los grados ya mencionados, como se ve en la figura 2.

Cada unidad fue objeto de detallada elaboración.



También se formuló un plan de preparación de los libros de texto. Según él habría cuatro sesiones, de dos semanas cada una, dedicadas a la escritura; cada sesión constaría de siete o más matemáticos árabes ayudados por cinco consultores extranjeros. Además se organizarían "cursos" de verano para preparar profesores de clases experimentales que se encargarían de poner a prueba los textos redactados en las sesiones mencionadas. Los libros se escribirían en inglés y más tarde se traducirían al árabe para uso de los estudiantes locales. Al fin de cada curso se examinarían los resultados de esta enseñanza y con arreglo a ellos se harían las revisiones pertinentes.

Todos estos planes se vienen convirtiendo en realidad. Ya tuvieron lugar tres sesiones de redacción de textos, la primera en Bagdad, en septiembre de 1969: la segunda en Beirut, en diciembre del mismo año; y la tercera en Amman, en febrero de 1970. Durante ellas se escribieron los borradores de los textos destinados a los cursos 10, 11 y 12.

Una cuarta sesión, celebrada en Kuwait, en abril de 1970, tuvo por resultado el examen, revisión y edición del texto correspondiente al curso 10, publicado en inglés en el otoño de 1970. Cada uno de los estados árabes lo adaptará a sus propias necesidades, y será traducido al árabe por una comisión interarábica, Teniendo a la vista la versión final del texto del curso 10, la misma sesión de Kuwait hizo también la revisión del texto del curso 11, el cual se publicará en inglés en la primavera de 1971 y a continuación será traducido al árabe. En una quinta sesión, celebrada en Niza, en septiembre de 1970, el texto del curso 12 fue revisado y editado, y se trazaron los planes para continuar el experimento hasta 1971, que es cuando la primera fase de la reforma tocará a su fin.

| | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|
| I Conjuntos, Relaciones, Aplicaciones | Simbolismo, etc. | Potencia de Conjuntos, etc. | Cardinalidad<br>Algebra de Boole |
| II Lógica y Lenguaje | Conectivos<br>Implicación | Demostración | Axiomática |
| III Algebra | Operación Binaria<br>Anillos, Cuerpos,<br>Sistemas Numéricos, etc. | Grupos<br>Isomorfismos | Interpolación,<br>etc. |
| IV Teoría de Números | Algoritmo de Euclides, etc. | Sistemas Modulares | Aplicaciones |
| V Geometría | Transformaciones<br>Espacio Afín | Coordenadas. Vectores | Secciones Cónicas |
| VI Funciones | Lineal, Ecuaciones | Cuadráticas, Reales,<br>Trigonométricas | Inversa, etc. |
| VII Análisis Numérico | Diagramas de Flujo | Aproximaciones | Métodos Iterativos |
| VIII Algebra Lineal | --- | Espacios Vectoriales de<br>2 y 3 Dimensiones<br>Matrices | Extensión a<br>Espacios Finitos |
| IX Probabilidad, Estadística | Probabilidad Elemental<br>Estadística Descriptiva | Combinatoria<br>Teorema del Binomio | Probabilidad<br>Condicional |
| X Análisis | --- | Sucesiones, Límites | Cálculo |

Fig. 2

En julio de 1970, ochenta profesores de un total de diez naciones árabes dedicaron un mes de estudio intensivo a los antecedentes del contenido matemático del curso 10, a la pedagogía de este mismo curso y al estudio completo del texto correspondiente no revisado, que ha sido traducido al árabe. Durante 1970-71 habrá en cada estado clases experimentales enseñadas por profesores preparados al efecto, y que serán evaluadas por miembros del Comité Nacional respectivo. Si este curso tuviese el éxito deseado, cada Estado se encargaría de formar y perfeccionar profesores para ese plan de estudios, que para entonces tendrá carácter oficial. Al terminar el año escolar tendrá lugar una reunión de todos los grupos nacionales para pasar revista a los resultados del primer año de enseñanza y hacer correcciones y preparativos para el segundo año de enseñanza experimental.

El Proyecto Árabe muestra cómo, mediante colaboración y determinación, se puede establecer un programa altamente coordinado para la reforma de la enseñanza de las matemáticas. La reforma completa del programa será llevada a cabo por cada estado, según propia iniciativa, a lo largo de un plazo de diez años.

*

* *



Importa notar que todos los movimientos de reforma hasta 1965 fueron intentos de hacer algo, es decir, de poner al día y corregir lo enseñado tradicionalmente en las escuelas, o bien añadir a los programas ciertos temas de la denominada matemática moderna o nueva. Estos nuevos temas eran teoría de conjuntos, grupos, anillos, cuerpos, vectores, espacios vectoriales, matrices, álgebra de Boole y otros semejantes. Dado que estos temas no se presentaban de una manera unificada o coherente, los programas de matemáticas resultaron recargados y a veces abstractos en demasía y difíciles. En los países donde se adoptaron estas medidas de manera precipitada, el número de estudiantes de matemáticas de los dos últimos años de la escuela secundaria descendió seriamente. Estos países están ahora intentando elaborar un programa más razonable, donde se mantengan los temas nuevos, si bien se expongan de manera menos rigurosa y más unificada que antes.

En Francia, país de nacimiento de Bourbaki (se dirá más de él luego), en la U.R.S.S. y en EE.UU., hubo cierta demora en la reestructuración de las matemáticas de las escuelas secundarias hasta hace cinco años, principalmente porque estos países se percataron de los tremendos problemas que la empresa implica, así como de la necesidad de experimentación en las salas de clase que se prestase a la evaluación de méritos y desventajas.

El programa de reforma más amplio y coherente se viene llevando a cabo en Francia. En enero de 1968 un comité de la Asociación de Profesores de Matemáticas, Dedicados a la Instrucción Pública, redactó un plan (aprobado luego por los miembros de dicha Asociación) de reforma de la enseñanza de las matemáticas desde la escuela primaria hasta la terminación del bachillerato. Por la ciudad donde se ha reunido el comité, se lo denomina *Plan de Chambery*. También ha sido respaldado por la Comisión Ministerial de Matemáticas, presidida por el profesor Lichnerowicz, uno de los matemáticos más renombrados de Francia.

El Plan está dividido en cuatro partes, que son: 1) Porqué se deben reformar las matemáticas enseñadas desde el kindergarten hasta la universidad; 2) porqué tal reforma es posible; 3) cómo debe hacerse la reforma, y 4) primera y sucesivas etapas de la reforma. En la parte 1) se muestra que las matemáticas son una ciencia viva y creciente aún; que hay una nueva pedagogía del *hacer* que facilita el aprendizaje, así como hay una economía moderna que requiere un porcentaje de personas mucho mayor que antes que posean conceptos matemáticos actuales. En la parte 2) se hace ver que la reforma ha penetrado ya la enseñanza y que la realización del plan considerado está cerca. Los primeros experimentos hechos en Francia y lo alcanzado en dicho sentido en otros países prometen mucho. A fin de que la reforma esté bien orientada, es necesario informar a profesores, padres y educadores de los objetivos propuestos y de las condiciones para alcanzarlos.

Se afirma en la parte 3) que la reforma debe empezar por una experimentación seria, reforzada por la formación y perfeccionamiento de los profesores necesarios. Con este objeto, en cada circunscripción académica de Francia (hay 15 de ellas actualmente) debe establecerse un Instituto de Investigación de la Enseñanza Matemática (IIEM) de categoría universitaria que se encargue de coordinar la experimentación y la formación de profesores (en septiembre de 1970 estaban constituidos ya diez de estos Institutos, en Aix-Marsella, Besanzón, Burdeos, Lyon, París, Rennes, Estrasburgo, Clermont-Ferrand, Lila y Montpellier, respectivamente). En la parte 4) se hallan las primeras etapas del plan, y abarcan: a) la enseñanza primaria y secundaria durante un período transitorio de cinco años; b) organización y puesta en práctica de una formación continua de profesores, utilizando el IIEM, y c) reclutamiento de personas bien calificadas para el profesorado.

Para el futuro se propusieron etapas escalonadas que destacan no sólo la amplitud y profundidad de la [illegible] que se pretende hacer, sino los aspectos realistas del plan. Los primeros pasos se dieron en el otoño de 1969 y la reforma total se terminará en 1982, o sea en un lapso de 13 años. El cuadro de la reforma fue el siguiente:

| Elemental (11-7) | Ciclo Inferior (6, 5, 4, 3) | Ciclo Superior (2, 1, F) |
|---|---|---|
| 1969 | Sexto | Segundo |
| 1970 | Quinto | Primero |
| 1971 Undécimo | Cuarto | Terminal |
| 1972 Décimo | Tercero | |
| 1973 Noveno | | Segundo |
| 1974 Octavo | | Primero |
| 1975 Séptimo | | Terminal |
| 1976 | Sexto | |
| 1980 | | Segundo |
| 1982 | | Terminal |

Se vienen haciendo experimentos en las escuelas primarias con el objeto de comenzar en ellas una revisión genuina del plan de estudios en septiembre de 1971. Un curso nuevo ha sido ya completado con éxito en 1969-70 tanto en el "nivel" sexto como en el segundo, y se han aprobado los libros de texto para ponerlos a prueba en los "niveles" quinto y primero, en el año 1970-71. Este plan, vasto y bien concebido, demandará su precio en profesorado y otro personal, en dinero y en tiempo. Por tratarse del intento de reforma de mayor alcance, merece que los demás países le dediquen esmerada atención.

No podemos dar por concluso este capítulo sin mencionar antes dos acontecimientos muy importantes, ambos ocurridos en Francia. Desde la fundación de la Comisión Internacional sobre Enseñanza Matemática (CIEM), en 1908, una sección del Congreso Internacional de Matemáticos se dedicó a la enseñanza de éstas, incluso de su historia y de su filosofía. Sin embargo, el interés en la enseñanza ha aumentado de tal modo que la CIEM, con ayuda económica de otras fuentes, organizó el *primer* Congreso Internacional de Educación Matemática, celebrado en Lyon, Francia, en agosto de 1969. A él concurrieron profesores de matemáticas y otros educadores de un total de 27 países de todo el mundo y las discusiones versaron sobre tendencias y problemas comunes a todos ellos. Entre los segundos citaremos: 1) La carencia general de profesores calificados, lo que condujo al reconocimiento de la necesidad de adiestramiento complementario de los mismos; 2) una profunda modificación de los libros de texto de geometría euclidiana tradicionales, en favor de otros métodos de estudio de la materia; 3) una tendencia a la unificación de la enseñanza escolar de las matemáticas en torno a los conceptos de conjunto, relación y función, y de las estructuras fundamentales de grupo, cuerpo y espacio vectorial; 4) una falta, y en consecuencia su búsqueda, de aplicaciones auténticas de las matemáticas a otras ciencias, y 5) la falta de un lenguaje como medio de correcta comunicación en los congresos internacionales, que se evidenció durante el transcurso del congreso.



## LA REVOLUCIÓN EN LAS MATEMÁTICAS

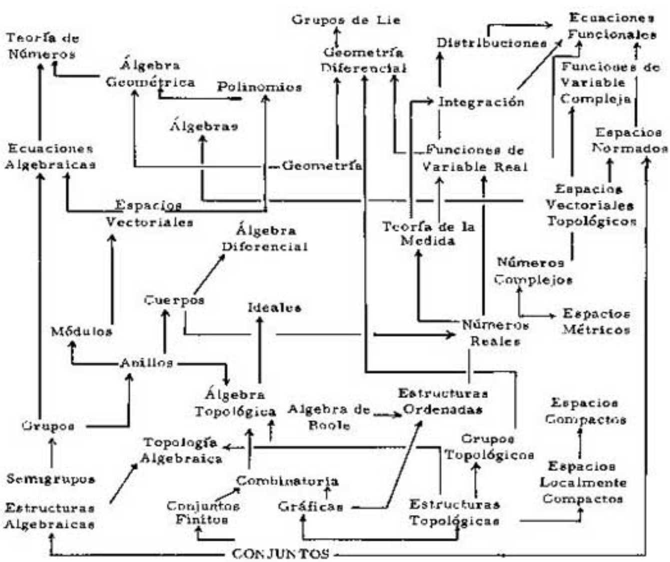
Hace cosa de un siglo, en coincidencia con la publicación del *Álgebra* en dos volúmenes de Chrystal, el álgebra tradicional, en cuanto a cálculo con cantidades y teoría de las ecuaciones, alcanzó su plenitud. Del mismo modo, hace poco menos que un siglo que los trabajos de Pasch, Peano, Hilbert y Veblen pusieron el estudio sintético de la geometría euclidiana en perfecto orden. El análisis, que sólo cuenta 300 años de existencia, se halla todavía luchando por la obtención de su propia fisonomía, y hoy, tal como se presenta en los libros de texto, retiene mucho de su sabor del siglo diecinueve, pese a las innovaciones introducidas por el álgebra y la topología. Se puede decir sin riesgo que la organización y desenvolvimiento de las matemáticas tradicionales alcanzaron su madurez hace cosa de un siglo, tras cinco milenios de forcejeo.

Durante los últimos 100 años se han dado pasos gigantescos que han resquebrajado los fundamentos mismos de las matemáticas clásicas, así como la organización de su contenido. La batalla iniciada por

Lobachewsky, Bolyai y Riemann, seguida de las filosofías intuicionista, logicista y formalista de Brouwer, Russell y Hilbert, respectivamente, culminó en la concepción contemporánea de las matemáticas en gran medida elaborada por Bourbaki.

Bourbaki es la designación de un grupo de matemáticos constituido como tal en la década 1930-40, en Nancy, Francia. Su propósito principal era (y todavía es en 1970) reconstruir la totalidad de las matemáticas sobre una amplia base general de modo que abarque la síntesis de los conocimientos más importantes alcanzados ya sobre la materia. La primera obra destacada del grupo, *Los Elementos de Matemáticas*, preparó el escenario para los libros subsiguientes, que superan en estos momentos los treinta y dos volúmenes, y los cuales rompieron el molde de la organización clásica de la materia valiéndose de la teoría de los conjuntos, de las relaciones y de las correspondencias (funciones). Sobre esta base, erigieron dos grandes estructuras: la algebraica y lo topológica, cada una de las cuales se dividió en subestructuras. Por ejemplo, la estructura algebraica, en semigrupos, grupos, anillos, módulos, cuerpos, etc; la estructura topológica, en grupos, espacios compactos, espacios convexos, espacios normales, etc. Estas dos estructuras, aunque permanentemente relacionadas, se hallan estrechamente unidas en la estructura de espacio vectorial. La estructura adoptada por Bourbaki es compleja y por ello se obtiene una excelente visión general de todas las matemáticas, aun cuando las ramas separadas pierdan su individualidad. La figura 3 ofrece un esquema de esta estructura.






Fuente: IBM Francia

Fig. 3

Ésta es la estructura a la que se hace referencia como matemáticas *contemporáneas*. Muchos de los temas de esta organización constituyen matemáticas nuevas o contemporáneas, pero engarzados en el esquema se halla todo lo interesante de las matemáticas tradicionales bajo nuevos atavíos. Hay que destacar que para Bourbaki y para la mayoría de los matemáticos no hay conflicto por la separación entre lo nuevo y lo tradicional. La mayor parte de lo llamado nuevo es en realidad un resultado de todo lo que se ha elaborado gradualmente a lo largo de la historia de las matemáticas, visto a la luz de un examen más penetrante de la índole de estas disciplinas, de la solución de problemas fundamentales no resueltos en el pasado, y de la creación de algunos pocos conceptos y conocimientos totalmente nuevos.

También hay que destacar que, para Bourbaki, las obras publicadas no son una *manera* de hacer investigación matemática, sino *medios* o *fuentes* para orientar al estudiante de matemáticas de modo que pueda abarcar en una mirada el conjunto de conocimientos matemáticos adquiridos hasta ahora. Su labor es algo así como el epítome de *la revolución en la enseñanza matemática*.

Se comprende fácilmente cómo, durante las dos últimas décadas, esta organización de las matemáticas ha pasado gradualmente a formar parte del plan de estudios de la licenciatura universitaria. La universidad es un grupo compacto de profesores y estudiantes entretejidos desde los grados más bajos a los más altos. Los que instruyen o enseñan, suelen hacerlo tanto a los aspirantes a la licenciatura como a los graduados, y escriben libros de texto y tratados para ambas categorías, y de este modo, es natural que su manera de abordar la materia en los planos superiores se refleje en su labor docente de nivel menos elevado. La discordancia aparece entre lo enseñado en la escuela secundaria y la enseñanza universitaria de enfoque moderno. El punto de vista de Bourbaki puede decir mucho a propósito de la manera en que las matemáticas deben enseñarse en las escuelas secundarias a fin de que los estudiantes ganen una visión de estas materias como un cuerpo de saber unificado. Sin embargo, para esto se requiere que quienes elaboren el plan de estudios y enseñen tengan una visión cabal del desarrollo histórico del álgebra y de la geometría desde los tiempos más remotos hasta nuestros días. Y también es necesario tener en cuenta la evolución de las ramas recientes de las matemáticas, como son la lógica, matemáticas finitas, estadística, probabilidades y análisis, así como su repercusión en los conceptos actuales. De esto se trata en los tres capítulos siguientes.

# 2

## DESENVOLVIMIENTO DEL ÁLGEBRA. EL ÁLGEBRA ACTUAL

### INTRODUCCIÓN

Es indudable que las matemáticas escolares están pasando por una fase revolucionaria. Y esta revolución es debida a un cambio de conceptos y a un aumento continuo de conocimientos en todo lo relativo a las matemáticas. Estos cambios están empezando a reflejarse en el plan de estudios de la escuela secundaria. Y para entender la naturaleza misma de ellos examinaremos antes, a grandes líneas, la evolución del álgebra desde sus primeros pasos hasta su estado presente. Si bien el álgebra se considera todavía como una rama separada de las matemáticas, y lo mismo es válido respecto de la geometría, ninguna de ellas puede concebirse hoy como una disciplina independiente. Desde muy temprano, el álgebra y la geometría llegaron a estar tan entrelazadas que aún hoy se habla de geometría algebraica o de álgebra geométrica, e incluso de análisis algebraico.

### ÁLGEBRA CLÁSICA



Al álgebra que se enseña hoy en la mayoría de las escuelas secundarias del mundo puede muy bien aplicarse el epíteto de *clásica*. Trata de las operaciones con expresiones, de hallar la solución a ecuaciones de varios tipos, y de la aplicación de una variedad de métodos y procedimientos apropiados para resolver tipos especiales de problemas. Esta álgebra tuvo su origen hace más de 4.000 años, y en los Estados Unidos alcanzó su plenitud con la publicación de dos tratados en la década 1880-89, el *Álgebra* de G. Chrystal, en dos tomos, y la de Hall. Estas obras estaban destinadas a la enseñanza de la materia en escuelas secundarias y en colegios universitarios.

Los primeros asomos del álgebra se notaron entre los babilonios y entre los egipcios, quienes idearon métodos numéricos para resolver diversos problemas surgidos en el curso de actividades organizadas en los albores de la civilización. Con toda certeza, las exigencias de un comercio creciente, llevado a cabo mediante el intercambio de sistemas monetarios diferentes, condujo a la necesidad de designar la respuesta a un problema especial como una "incógnita". Esta álgebra primitiva no recurrió a otro simbolismo que no fuese el de un sistema de numeración. Que sepamos, las soluciones a estos problemas no fueron obtenidas mediante un tipo cualquiera de razonamiento general, ni mediante demostraciones. Se trataba de un álgebra estrictamente numérica y empírica: una lista de instrucciones verbales conducentes a la solución de una clase especial de problemas. Los métodos seguidos dependían de tablas numéricas que contenían los cuadrados y los cubos de números enteros. Dentro de estas limitaciones, los babilonios lograron resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas de ciertos tipos, sistemas de dos ecuaciones lineales y hasta ciertos sistemas de ecuaciones cuadráticas.

Si bien estas conquistas se consideran rudimentarias y primitivas, a los babilonios hay que otorgarles, por lo menos, el mérito de haber resuelto una ecuación cúbica, proeza que no superaron los europeos hasta comienzos del siglo XVI. Sin embargo, la falta de notaciones simbólicas fue un obstáculo insuperable a la creación de un cuerpo de doctrina o ciencia, y como consecuencia hubieron de transcurrir más de 2.000 años sin generalizaciones y abstracciones, ambas esenciales al desenvolvimiento del álgebra. Por esta razón, estos primeros intentos deben ser considerados como antecesores de esta ciencia o pre-álgebra.

El álgebra o pre-álgebra de los egipcios, contemporáneos de los babilonios, fue todavía más débil tanto en lo que se refiere a complejidad como a hondura de pensamiento. Aunque se valieron de una "incógnita" y tenían un símbolo para aludirla, el método de hallar la respuesta consistía en atribuirle un resultado y en rectificarlo en vista de las consecuencias. Caso de que fuese inexacta una respuesta, no era difícil por lo general ver en qué razón se hallaba con respecto a los datos del problema, si excedía la solución correcta o si pecaba por defecto; y entonces se modificaba el valor dado de acuerdo con esa razón. Este proceder es algo así como un precedente de los refinados métodos de interpolación y de los procesos iterativos seguidos en las soluciones de problemas por aproximaciones sucesivas.



Un ejemplo famoso de este proceder se halla en un problema contenido en el Papiro Rhind, en el cual se requiere dividir 100 hogazas de pan en 5 porciones en progresión aritmética de modo que 1/7 del número total de hogazas contenido en las 3 porciones últimas sea igual al total de las otras dos porciones. El que intenta resolver el problema asume o supone que la diferencia entre dos porciones consecutivas es 5 1/2 hogazas. (Es tentador especular sobre la manera en que el calculador llegó a tal supuesto.) Otra suposición fue que la porción inicial es 1 hogaza, en cuyo caso las 5 porciones serían 1, 6 1/2, 12, 17 1/2, 23, y su suma = 60, y no 100, como debiera. Ahora la razón 100/60 = = 5/3, y en consecuencia las porciones justas se obtienen multiplicando las aproximadas anteriores por el factor 5/3. Este problema revela que los egipcios contemporáneos de este papiro tenían ya cierta noción de las fracciones ordinarias.

Uno de los hechos significativos de la historia de las matemáticas fue la incapacidad de los griegos para formular un concepto de los números racionales e irracionales (o números reales). Sin embargo, desarrollaron una teoría altamente sistematizada de la razón de los números enteros que contiene, en cierto modo el concepto actual de número racional. Fue esta falla de los griegos en elaborar un concepto de número irracional lo que los llevó a una de sus grandes conquistas teóricas: el estudio axiomático del espacio, la única teoría axiomática en matemáticas hasta el siglo XIX.

La demostración, debida a Euclides, de que no existe una razón de dos enteros que exprese la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1, es bien conocida. Como consecuencia de este conocimiento y de la limitación conceptual que implica el desconocer el número irracional, la teoría de la medida de segmentos incomensurables fue abordada por métodos geométricos y no algebraicos. Desde Euclides hasta los tiempos de Newton y Leibnitz, cualquier cosa de índole matemática que no fuese geometría, se denominaba álgebra.

Como un ejemplo del "álgebra geométrica" de Euclides, considérese el problema de hallar la longitud del lado de un cuadrado cuya área iguale la suma de las áreas de un cuadrado dado y de un rectángulo cuyos lados sean el del cuadrado dado y el del cuadrado cuyo lado se pretende hallar. En símbolos actuales, el problema es: Si $q$ es un número dado, hállese otro número $x$, tal que $x^2 = qx + q^2$. Euclides da una construcción del segmento de longitud $x$ empleando sólo una regla y un compás, con lo cual el problema se plantea en el terreno de la geometría. La solución equivale algebraicamente a

$$x = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4q^2 + q^2} = \frac{q}{2} + \frac{q}{2}\sqrt{5} = \frac{q}{2}(q + \sqrt{5})$$

El criterio de homogeneidad en todos los términos del problema indicado, o sea a que $x^2$, $qx$ y $q^2$ sean de segundo grado, permitió a los hindúes, en fechas posteriores, desarrollar el álgebra por medio de la geometría.



En los últimos tiempos de la antigua Grecia (de 100 a 300 a. de J. C.), dos de sus matemáticos, Herón y Diofanto, hicieron notables contribuciones al desarrollo del álgebra. Diofanto abrió la primera brecha conducente a la simbolización en lo que se llama hoy álgebra sincopada. En ella utilizó letras para representar las incógnitas de la ecuación, y también símbolos especiales para indicar la suma, la multiplicación y la igualdad. De esta manera, el álgebra saltó por primera vez la valla de las meras instrucciones verbales para hacer operaciones con números conocidos y desconocidos. Sin embargo, el álgebra de Diofanto siguió siendo esencialmente numérica y a la solución de cada problema se le dio una forma especial, concreta. En el álgebra de Diofanto, una ecuación cuadrática tenía dos, una o ninguna solución y sólo se aceptaban como raíces a un número entero positivo o a razones de dos enteros. Es de observar, sin embargo, que en este dominio restringido de los enteros y las fracciones ordinarias, su interpretación de las incógnitas era correcta porque no tenía idea de los números negativos ni de los irracionales. Finalmente, hay que notar que su solución de una ecuación con varias incógnitas, por ejemplo la $3x + 4y = 5z$, dio comienzo a un tipo de investigación que incubó gran parte de la teoría de números de nuestros días.

Durante la Edad Media, el estudio de las matemáticas, al igual que el de las demás disciplinas, declinó y no revivió hasta que los hindúes y los árabes pusieron en juego nuevos recursos y métodos de cálculo. Los indúes fueron los primeros que adoptaron en álgebra una forma de demostración. Tuvieron cierta idea de la homogeneidad de los términos de una ecuación. Por ejemplo, $x \cdot x$ tenía por contraparte, o correspondiente, el área de un cuadrado de lado $x$, y el producto $3 \cdot x \cdot x$ se interpretaba como el volumen de un paralelepípedo rectangular de aristas 3, $x$ y $x$. Omar Khayyam, en su tratado de álgebra, resolvió ecuaciones cuadráticas y cúbicas. El diagrama siguiente muestra su manera de resolver la ecuación $x^2 + 4x = 5$ por el método de *completar el cuadrado*, donde *cuadrado* es un término geométrico equivalente al algebraico $x \cdot x$ ó $(x + 2)(x + 2)$.

Los árabes estaban más interesados en números que en figuras geométricas. Sin llegar a enteder su índole particular, utilizaron los números irracionales como ficticios. También corresponde a los árabes el honor de haber dado nombre a esta rama de las matemáticas.

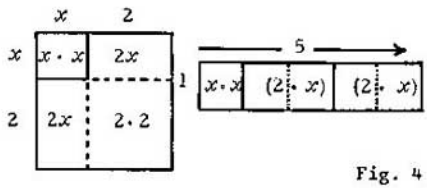



Fig. 4

El matemático árabe Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi tituló uno de los varios libros que escribió *"Hisab Aljebr w'al Muqabala"*, o sea la *"ciencia de la transposición e igualación"*. La "Aljebr" árabe se latinizó en "álgebra", con que hoy se la conoce.

Hacia comienzos del siglo XIII, Europa entró en un período de creciente actividad matemática, en especial en lo que se refiere al álgebra. La escuela italiana (Fibonacci, Ferrari, Tartaglia, Cardano, Bombelli) dirigieron su atención a la búsqueda de una solución general de las ecuaciones cúbicas. Los hindúes habían ya descubierto la fórmula de las raíces de las ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx = -c$, por medio del recurso de completar el cuadrado. (Todavía no se consideraba el 0 como un número, y por ello la ecuación general de segundo grado no se escribía en la forma: $ax^2 + bx + c = 0$.) Gracias a la fórmula de Tartaglia, aparecida en la obra de Cardano, se llegó a la solución general de la ecuación cúbica y se dieron comienzo a nuevas investigaciones para obtener la de la ecuación de cuarto grado.

Hacia 1600, y como resultado de los esfuerzos en busca de la resolución de ecuaciones, se disponía de un gran número de métodos especiales (algoritmos) para conseguirlo. El matemático francés François Vieta, tras un examen de dichos métodos, consiguió hallar una teoría algebraica general para resolver todas las ecuaciones de los primeros cuatro grados. Este triunfo fue posible debido a la creación de un sistema simbólico, inexistente hasta entonces, para representar variables, constantes y operaciones. Vieta, en su *Logistica Speciosa*, utilizó las vocales $a, e, i, o, u$ para representar variables, y las consonantes $b, c, d, f, g, \ldots$ para representar datos o constantes. Más tarde, René Descartes adoptó la innovación consistente en representar por las últimas letras del alfabeto, $x, y, z, w$, las incógnitas o sea números cuyo valor concreto se trata de encontrar, y por las primeras letras $a, b, c, \ldots$, constantes arbitrarias, como se hace todavía hoy.

Hacia la misma fecha, 1600, se aceptó el cero como un número y las ecuaciones se escribieron en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, etc. Con todo esto, el álgebra llegó a ser una ciencia de cálculo simbólico con letras y números, en contraste con la aritmética, cuyos cálculos se hacían siempre con números concretos. Esta álgebra se resume en contenido y concepto en la *Introducción al Álgebra* de Euler, publicada en 1760, y definida como

**La Teoría del Cálculo con Cantidades**

Tal es la primera imagen del álgebra clásica. Su contenido abarca una gran variedad de temas, como puede comprobarse en cualquier libro de texto de la materia para estudiantes de enseñanza secundaria de nuestros días

La segunda imagen del álgebra empezó a perfilarse en los siglos XV y XVI por obra de la escuela italiana, cuyos representantes dedicaron atención preferente a las ecuaciones. Tras resolver en toda su generalidad la de cuarto grado, su atención se desplazó naturalmente hacia las de quinto grado y las de grado mayor. Durante los trescientos años siguientes se demostró un sinnúmero de teoremas y se hallaron nuevos procedimientos para separar raíces, para relacionarlas con los coeficientes, para precisar su número, para demostrar el teorema fundamental del álgebra y la imposibilidad de obtener un procedimiento general finito de cálculo de las raíces de una ecuación cualquiera de grado superior al cuarto. Todo este cuerpo de conocimientos se fue incorporando paulatinamente a los libros de texto. Hacia 1860, como resultado de la aparición del *Álgebra* de Serret, un siglo después de la publicada por Euler, quedó definida la segunda imagen del álgebra, que por cierto es aún el álgebra clásica de nuestros días, es decir



**La Ciencia de la Resolución de Ecuaciones**

En efecto, en el texto de Serret se halla por primera vez la cumbre más elevada de la teoría algebraica de las ecuaciones, es decir, la teoría de Galois, que es un primer paso fundamental en el desarrollo del álgebra moderna.

## EL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA MODERNA

Es difícil precisar la fecha de nacimiento del álgebra moderna, es decir, cuándo se la pudo reconocer como una materia única y distinta del algebra clásica. Tal vez dicho reconocimiento haya tenido lugar en 1910 al publicarse el libro de Steinitz titulado *La Teoría Algebraica de los Cuerpos (Théorie algébrique des corps)*. Aquí por primera vez se halla un tratamiento sistemático de operaciones con elementos abstractos, es decir, cosas que *no son ya* números, variables o figuras de las disciplinas clásicas aritmética, álgebra o geometría. El libro siguiente en que se llevó a cabo la misma tarea fue *Álgebra Moderna (Algèbre Moderne)* por Van der Waerden, publicado en 1931. Diez años más tarde apareció el primer texto inglés de la misma índole, *Un Bosquejo del Álgebra Moderna (A Survey of Modern Algebra)*, por Birkhoff y McLane. Estas fechas son la mejor confirmación de lo apropiado que es aquí el epíteto "moderno" aplicado al álgebra.

La creación del álgebra tal como hoy se conoce no fue instantánea, sino que la precedió un siglo de intensa originalidad en la investigación y coordinación de nuevas ideas. Durante este período surgieron tres corrientes principales de investigación matemática, de avance simultáneo, que enumeramos como sigue:

1. **Algebraica**, en el sentido de resolución de ecuaciones, que consistió en los estudios de Lagrange y de Gauss, complementados por la creación de la teoría de los grupos de permutaciones por Abel y Galois, y la formalización de estos estudios por Jordan y Serret.

2. **Geométrica**, la exposición geométrica de los números complejos, por Wessel, Argand y Gauss, que condujo al estudio de los vectores que, a su vez, culminó en el álgebra lineal de nuestros días. Desde un punto de vista estricto, en este desenvolvimiento geométrico influyeron en gran medida el estudio de las transformaciones geométricas y las operaciones de composición de transformaciones. Además, la creación de las geometrías no-euclidianas (véase el capítulo 3) condujo a relaciones entre geometrías y grupos de transformaciones, expuestas por Felix Klein. Estas relaciones llevaron a una de las características significativas de las matemáticas, o sea a la unificación de sus diversas ramas.

3. **Aritmética**, durante el siglo XIX y a partir de Gauss (*Disquisitiones Arithmeticae*, 1801) se descifró la naturaleza del número. Gauss anticipó algunas de las ideas fundamentales del álgebra contemporánea, por ejemplo, relaciones de equivalencia, grupos conmutativos finitos, extensiones, etc. Durante este período, los principales investigadores de todo lo relativo a números fueron Dirichlet, Kummer, Kronecker, Weierstrass, Meray, Cantor, Dedekind y Hilbert. También los matemáticos norteamericanos Benjamin Pierce y su hijo C. E. Pierce, Gibbs y Dickson hicieron importantes contribuciones al estudio de los números durante este período.



No sería pertinente entrar aquí en los detalles del desenvolvimiento histórico de estas tres corrientes de investigación matemática: el álgebra, que llevó a los grupos y sistemas operativos; la geometría, que desembocó en el álgebra lineal, y la aritmética, que condujo a la comprensión del concepto de número y a ciertas ideas del álgebra actual. Sólo se darán aquí algunos ejemplos significativos.

Volviendo a la Edad Media, encontramos que el primer paso en la dirección "moderna" fue el descubrimiento y aplicación de los números complejos. Cardano los utilizó bajo la denominación de imaginarios o ficticios. Bombelli demostró que podían ser raíces o soluciones de ecuaciones cúbicas. DeMoivre, en 1725, expuso una teoría completa del cálculo con estos números, escribiéndolos de las dos maneras, $a + bi$ y $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. La representación geométrica de estos números, propuesta a comienzos del siglo XIX por Wessel (Dinamarca), Argand (Francia) y Gauss (Alemania), preparó el camino para la aceptación de estos números como auténticas entidades matemáticas. Tras treinta años de investigación, Gauss dio, en 1831, una teoría puramente algebraica de estos números, que es la aceptada hoy, independiente de toda interpretación geométrica. Un número complejo se define como un par ordenado de números reales $(a, b)$ con las siguientes propiedades:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si, y sólo si, } a = c \text{ y } b = d \qquad \text{(igualdad)}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{(adición)}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad \text{(multiplicación)}$$

Ahora el conjunto $R = \{(a, 0)\}$, un subconjunto del conjunto de los números complejos, tiene la misma estructura que el conjunto de los números reales. Además, puesto que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, se puede decir que la raíz cuadrada de $(-1, 0)$ es $(0, 1)$, que se representa por la letra o símbolo $i$. Puesto que el conjunto $P = \{(0, b)\}$ se puede identificar con el conjunto $\{(b, 0) . (0, 1)\}$,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \text{ donde } r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Volviendo a la representación geométrica, el número $i$ se representó también como un operador rotacional de amplitud $\pi/2$, con centro en el origen. Más tarde Cayley utilizó una matriz para representar los números complejos, lo que supone la adopción de una estructura y su realización.

La presentación lógica del sistema de los números complejos por Gauss fue un punto decisivo en la evolución de las matemáticas por ser la primera aplicación del método axiomático al álgebra y también porque abrió el camino a la consideración de sistemas de ternas ordenadas, $(a, b, c)$, de cuaternas $(a, b, c, d)$ y, en general, de $n$-uplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. En 1834, el matemático inglés G. Peacock publicó un álgebra cuyo primer volumen estaba dedicado al álgebra del dominio de los números enteros, e introdujo las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Este enfoque resultó en aquel momento tan nuevo que hasta 1870 no ganó la aprobación del mundo matemático. El segundo volumen de la obra de Peacock generalizó el álgebra a los números racionales y reales mediante el llamado Principio de Permanencia de las Leyes Formales de Hankel. Este principio no subsiste hoy, pero según él, cuando un sistema numérico se amplía o generaliza para abarcar nuevos elementos, las operaciones en el nuevo sistema deben ser definidas de modo que las leyes mencionadas sigan siendo válidas. Esta idea de extensión es el primer indicio de la manera en que más tarde los espacios vectoriales se generalizaron a $n$ dimensiones, para $n$ finito o infinito.

La segunda corriente que afluyó al álgebra actual tuvo su origen en el esfuerzo persistente de resolver ecuaciones. Lagrange buscó las razones del éxito alcanzado en la resolución de las ecuaciones de los primeros cuatro grados y del fracaso en las de grado superior. En el caso de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$, las raíces $x_1$ y $x_2$, están relacionadas con los coeficientes por las igualdades $x_1 + x_2 = -b$ y $x_1 x_2 = c$. Lagrange investigó estas relaciones en el caso de las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3 + px + q = 0.$$

Aplicando la bien conocida fórmula de Cardano, es decir,

$$A^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad B^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

resulta que las raíces de la ecuación cúbica son

$$A + B, \quad A\omega + B\omega^2, \quad A\omega^2 + B\omega,$$

donde $\omega = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}\,i$ y $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\,i$ (las raíces complejas de la unidad). Designando las tres raíces por $x_1, x_2$ y $x_3$, Lagrange notó en primer lugar que puede haber seis permutaciones de estas raíces y que se pueden agrupar en dos conjuntos

$$(x_1, x_2, x_3); \quad (x_2, x_3, x_1); \quad (x_3, x_1, x_2) \qquad \text{(I)}$$

$$(x_1, x_3, x_2); \quad (x_3, x_2, x_1); \quad (x_2, x_1, x_3) \qquad \text{(II)}.$$

Y probó que la expresión

$$(x_i + \omega x_j + \omega^2 x_k)^3$$

sólo toma un valor por cada permutación perteneciente al grupo I, y otro valor por cada permutación del grupo II. En efecto, un poco de álgebra mostrará, recordando que $1 + \omega + \omega^2 = 0$, que



$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = 3B; \quad x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 = 3A \qquad \text{(III)}.$$

Finalmente, añadió la relación restante $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ a las contenidas en III, y así redujo la resolución de la ecuación cúbica a un sistema de tres ecuaciones de primer grado. Este es uno de los primeros intentos de reducir un problema algebraico a un problema lineal. El lector interesado puede repetir la investigación de Lagrange con la famosa ecuación de Bombelli

$$x^3 - 15x = 4.$$

Lagrange también investigó las raíces de la ecuación de cuarto grado y mostró que la expresión $(r_1 \cdot r_2) + (r_3 \cdot r_4)$ sólo toma tres valores distintos cuando las raíces se permutan de todas las maneras posibles (4! ó 24). Esto bastó para indicar que el problema de resolver ecuaciones de quinto grado o mayor aun está relacionado con ciertas expresiones que, de algún modo, son invariantes respecto de las permutaciones de las raíces.

Durante 300 años, el problema de encontrar un algoritmo finito basado en las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y extraer raíces que diese como resultado final las raíces de cualquier ecuación puso a prueba los talentos de los matemáticos más eminentes. Lagrange se acercó a la victoria al sospechar que la clave del problema debía hallarse en las permutaciones de las raíces de tales ecuaciones. Cincuenta años después de esta conjetura, (c. 1825) Niels Abel resolvió el problema: no hay fórmulas que permitan obtener las raíces de ecuaciones de grado quinto o superior. Y con esta conclusión inauguró una era nueva en la evolución del álgebra: los comienzos de la teoría de los grupos y el consiguiente estudio de las estructuras. Esta fase será tratada en una sección posterior.

Galois prosiguió este estudio conducente a la creación de la teoría de los grupos mediante el examen del conjunto de las permutaciones de las raíces de ecuaciones polinómicas de grado $n$. De este modo obtuvo las propiedades más sencillas de la composición de las permutaciones de las raíces. El paso siguiente consistió en el desarrollo de la teoría de los grupos y el comienzo del estudio de las estructuras algebraicas. Por vez primera, se definieron operaciones binarias con objetos distintos de variables y de números.

La tercera corriente tuvo los números por tema. En 1801, Gauss definió la congruencia entre los enteros: una noción matemática de nuevo cuño. Dos enteros cualesquiera $a$ y $b$ se dicen congruentes con respecto a un módulo, $m$, distinto de 0, si, y sólo si, dan el mismo resto al ser divididos por $m$. Lo importante de esta definición: $a \equiv b$ (mod. $m$) es que la relación "≡" es un ejemplo de relación de equivalencia, es decir, "congruencia módulo $m$" es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva. Gauss fue el primero en poner de manifiesto la importancia de esta relación. Además, mostró que ésta permite hacer una partición del conjunto Z de los enteros en subconjuntos disyuntos cuya unión es Z; estos subconjuntos se denominan clases de equivalencia, y caso de ser 3 el módulo, las clases de equivalencia son las siguientes:



$$S_0 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$$
$$S_1 = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$
$$S_2 = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

Ahora se puede construir un álgebra de clases que consiste de tres elementos $S_0$, $S_1$ y $S_2$. Con estas tres clases se puede operar de acuerdo con las tablas siguientes:

| + | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|
| $S_0$ | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ |
| $S_1$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_0$ |
| $S_2$ | $S_2$ | $S_0$ | $S_1$ |

| · | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|
| $S_0$ | $S_0$ | $S_0$ | $S_0$ |
| $S_1$ | $S_0$ | $S_1$ | $S_2$ |
| $S_2$ | $S_0$ | $S_2$ | $S_1$ |

Por ejemplo,

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1 \text{ y } s_2 \in S_2\} = S_0 \text{ y}$$
$$S_1 \cdot S_2 = \{s_1 \cdot s_2 : s_1 \in S_1 \text{ y } s_2 \in S_2\} = S_2.$$

Se puede demostrar que, para hacer estas operaciones, se puede elegir cualquier elemento de una clase particular $S_i$ para representar la clase. De esta manera, $S_1 + S_2 = S_0$, por cuanto $1 + 2 = 3 \in S_0$ y $S_1 \cdot S_2 = S_2$ porque $1 \cdot 2 = 2 \in S_2$.

Esta misma idea fue aplicada por Cauchy y otros matemáticos a la congruencia de polinomios. Cauchy consideró congruencias cuyo módulo era $(x^2 + 1)$. Los restos de dividir dos polinomios dados por $x^2 + 1$ son, por lo tanto, polinomios de primer grado. Así, para dos funciones cualesquiera $f(x)$ y $g(x)$, se tiene:

$$f(x) \equiv a + bx \pmod{x^2 + 1} \qquad g(x) = c + dx \pmod{x^2 + 1}$$

A partir de esto es fácil demostrar que

$$f(x) + g(x) \equiv (a + c) + (b + d)x \pmod{x^2 + 1} \text{ y}$$

$$f(x) \cdot g(x) \equiv (ac - bd) + (ad + bc)x \pmod{x^2 + 1}.$$

Estas fórmulas, derivadas a partir de números reales, muestran la legitimidad de las fórmulas de Bombelli (para $1$, $-1$, $i$, $-i$), así como la de la interpretación geométrica de Gauss, y otros, de los números complejos, es decir: el álgebra de los números complejos se reduce al álgebra de las congruencias de polinomios de coeficientes reales, módulo $(x^2 + 1)$.

Estos resultados llevaron a la generalización de los sistemas operativos más allá de la esfera de los números complejos. En 1843, Hamilton inventó los cuaternios o cuaterniones. Desde las primeras investigaciones de los números complejos se vio que se podían aplicar éstos para expresar rotaciones y dilataciones de figuras planas. La estrecha relación entre el espacio de dos dimensiones o plano con el álgebra de los números complejos indujo a Hamilton a explorar la posibilidad de un álgebra de los números hipercomplejos que pudiese aplicarse a las rotaciones y dilataciones en el espacio euclidiano. Tras años de intentos fallidos, se dio cuenta finalmente de que el obstáculo de tales intentos era la ley o propiedad conmutativa de la multiplicación. De acuerdo con el dictamen de Peacock sobre la permanencia de las leyes de las operaciones, la conmutativa de la multiplicación debía subsistir cualesquiera que fuesen los entes multiplicados. Sin embargo, en un momento de lucidez, (tras 15 años de trabajo), Hamilton echó por la borda la ley de permanencia, elaboró el cálculo con cuaternios y con ello dejó a los matemáticos en libertad para extender sus investigaciones a una variedad mucho más vasta de estructuras algebraicas.



De modo análogo a la representación de los números complejos ordinarios por un par de números reales ordenados, Hamilton representó sus números hipercomplejos o cuaternios mediante cuaternas ordenadas $(r, a, b, c)$, para las cuales:

$$\begin{aligned} (r,a,b,c) &= (r',a',b',c') \text{ si, y sólo si,} \\ r &= r',\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{aligned} \qquad [1]$$

$$\begin{aligned} (r,a,b,c) &+ (r',a',b',c') = \\ &= (r + r',\ a + a',\ b + b',\ c + c'). \end{aligned} \qquad [2]$$

Al igual que con los números complejos, el cálculo mostrará que

$$(-1, 0, 0, 0) = \begin{cases} 1 \cdot (0,1,0,0) \cdot (0,1,0,0) \\ 2 \cdot (0,0,1,0) \cdot (0,0,1,0) \\ 3 \cdot (0,0,0,1) \cdot (0,0,0,1) \end{cases}$$

Si designamos $(1,0,0,0)$ por $u$; $(0,1,0,0)$ por $i$; $(0,0,1,0)$ por $j$, y finalmente, $(0,0,0,1)$ por $k$, se tiene

$$\begin{aligned}(r,a,b,c) &= (r,0,0,0) + \ldots + (0,0,0,c) = \\ &= ru + ai + bj + ck\end{aligned}$$

resultado éste análogo al elaborado por Gauss respecto de los números complejos. El producto de dos cualesquiera de tales elementos puede obtenerse mediante la tabla

| $\cdot$ | $u$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $u$ | $u$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-u$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $u$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $j$ | $-i$ | $-u$ |



Con ella, para el producto de dos cuaternios se obtiene la siguiente igualdad:

$$(r,a,b,c)(r',a',b',c') = (rr' - aa' - bb' - cc',\ bc' - cb',\ ca' - ac',\ ab' - ba') \qquad [3]$$

En 1844, F.G. Grassmann publicó una teoría mucho más general de $n$-uplas. En ella mostró la vasta riqueza de estructuras que era posible obtener a partir de unos pocos postulados. Este adelanto fue bautizado por Grassmann *Teoría de las Extensiones* (Ausdehnungslehre) y aunque anticipó muchos resultados obtenidos después por otros algebristas, su obra permaneció desconocida en gran parte, hasta que en 1900 se aplicó en la física cuántica.

El estudio de las matrices fue el tema central de la tercera de las grandes corrientes que confluyeron en las matemáticas actuales. Su creador fue Arthur Cayley, alrededor de 1860, como consecuencia de sus investigaciones sobre transformaciones lineales en el plano. Prescindiendo de las variables mismas y ateniéndose sólo a los coeficientes de las transformaciones, los dispuso conforme a un cuadrado de filas y columnas. Así la transformación

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \quad \text{podía describirse completamente por} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Cayley prosiguió el estudio del álgebra de las matrices de orden $n$ partiendo de las propiedades de las transformaciones lineales con $n$ variables. Mostró también cómo se podía representar los cuaternios por medio de las matrices $2 \times 2$ y más tarde, en 1884, cómo representar los números complejos por un cierto subconjunto del conjunto de las matrices reales de orden $2 \times 2$.

En resumen, el siglo XIX produjo tres grandes corrientes de pensamiento algebraico. Una de ellas siguió el cauce de la aritmética pura y se preocupó de ampliar los números reales a los complejos y a los cuaternios mediante los pares, las ternas, cuaternas y, en general, $n$-uplas de números reales ordenados. Otra corriente consistió en la investigación del álgebra clásica, como la ilustran los intentos de hallar fórmulas aplicables a las ecuaciones de mayor grado siguiendo las huellas de las ya obtenidas para resolver las de los primeros grados. Los representantes de esta corriente estudiaron los grupos de permutaciones y los grupos finitos, que alcanzaron gran refinamiento a fines del pasado siglo. La tercera y última corriente se distinguió por sus preferencias geométricas, como se advierte en los cuaternios de Hamilton, en las extensiones de Grassmann y en las matrices de Cayley, todo lo cual llevó al desarrollo del álgebra lineal y de los espacios vectoriales. Hacia 1910, la unión de estas tres corrientes formó lo que hoy designamos como álgebra moderna.

## EL ÁLGEBRA HOY



Las páginas que preceden brindan un esbozo de la historia del álgebra desde sus vagos orígenes numéricos hasta su fase del cálculo con cantidades, y finalmente el estudio de la resolución de ecuaciones. La confluencia de las tres grandes corrientes que se acaban de mencionar requirió una nueva definición de esta disciplina, como el *estudio de estructuras.*

Esta nueva definición del álgebra fue emergiendo lentamente durante los dos siglos pasados con dos características intrínsecas de todas las matemáticas. En primer lugar, la teoría de grupos, poco a poco, se ensanchó (y se estrechó) a fin de abarcar estructuras tales como anillos, dominios de integridad, cuerpos, monoides, semigrupos, etc. El concepto de grupo combinado con otras estructuras que operan con sus elementos llevó a la construcción de espacios vectoriales, módulos, "álgebras", y así sucesivamente. Para el matemático, la aplicación y el reconocimiento de estructuras fundamentales como las mencionadas arriba, representó la apertura de una tremenda brecha en los bastiones que confinaban el pensamiento de sus predecesores. Problemas insolubles antes por medio de los recursos del álgebra clásica, pudieron ser examinados desde un punto de vista distinto y muchos de ellos, resueltos. En geometría y análisis, las estructuras algebraicas han sido como el nervio unificante que en años recientes penetró en todas las ramas de las matemáticas.

El profesor de matemáticas universitario que enseñe un curso de análisis moderno descubre que, a menos que sus alumnos hayan adquirido una buena base de álgebra actual, no puede discutir conceptos importantes, tales como el de operador. Y de la misma manera no puede tratar el comportamiento de los operadores en espacios de Banach o de Hilbert (ambos derivados de la estructura de espacio vectorial), la continuidad de los operadores sobre estos espacios o el teorema espectral en cualquiera de sus formas particulares. En geometría, el concepto de grupo ha permitido a los matemáticos elaborar distintas geometrías a partir de grupos de transformaciones. En efecto, el reconocimiento de estructuras en geometría contribuyó a su nueva definición tal como se presenta en el siguiente capítulo. La nueva concepción del álgebra vino a ser un eficacísimo instrumento para la expansión de la matemática en su totalidad.

La segunda característica es que las estructuras del álgebra abstracta empezaron a hallar aplicaciones en la descripción de fenómenos físicos. En 1890, el cristalógrafo ruso E.S. Federov mostró cómo la teoría de grupos podía ser aplicada a la clasificación de sistemas de puntos en el espacio que representen la estructura atómica de los cristales. Esta fue la primera aplicación de la teoría de grupos a la resolución de un problema científico no resuelto hasta entonces. Más tarde J.W. Gibbs, hombre de ciencia norteamericano, aplicó un álgebra de ternas ordenadas a la solución del problema del refinamiento del petróleo, por medio del craqueo del petróleo crudo. También contribuyeron a reforzar la opinión en pro de los nuevos desarrollos matemáticos, las aplicaciones recientes de las matrices y de la técnica del álgebra lineal (cuyos conceptos fundamentales dependen a su vez del concepto de espacio vectorial) a la resolución de problemas tecnológicos en todas las ciencias --tales como la física, las ciencias del comportamiento, las ciencias biológicas, la astrofísica. Pues la condición básica para el reconocimiento de recientes adelantos en matemáticas es que éstos sean aplicables con provecho fuera de la esfera de las matemáticas mismas.



De todo lo dicho resulta que el álgebra puede ser descrita como un estudio generalizado de estructuras, para las cuales se requiere:

1. Un conjunto de elementos (no definidos).
2. Un conjunto de enunciados concernientes a tales elementos (la estructura).
3. Una lógica deductiva.
4. Una serie de proposiciones demostrables en la estructura (la teoría).
5. La búsqueda y estudio de realizaciones significativas de la teoría (las aplicaciones).

Lo que determina la estructura es el conjunto de elementos y el acierto en la selección de los enunciados.

De todo cuanto se lleva dicho hasta aquí resulta claro que el álgebra contiene todo lo esencial del álgebra clásica. Pero también es una organización concebida de un modo por completo diferente, donde los números y las ecuaciones están subordinados a las estructuras, a las realizaciones de éstas y a la multitud de actividades y aplicaciones que pueden derivarse tanto de las estructuras como de las realizaciones. Desde 1910 a 1955, el desenvolvimiento del álgebra abstracta y del álgebra lineal se concibió como un estudio avanzado y muy distante de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias. Hoy se reconoce que el álgebra actual o contemporánea debe constituir el núcleo de lo que se enseñe en dichas escuelas, presentado en forma accesible a la capacidad del estudiante. Además, la unidad de las matemáticas requiere que esta álgebra se enseñe en la más íntima asociación posible con la geometría y el análisis.

## ÁLGEBRA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

Hoy día se cuenta con medios más eficaces de organizar el contenido de las matemáticas destinadas a la enseñanza secundaria. Nuevas teorías didácticas, como el método del plan concéntrico de la enseñanza para la introducción y extensión de los conceptos matemáticos, vienen siendo objeto de prueba en muchos de los programas de matemáticas, tanto en Europa como en Estados Unidos (véase el capítulo 5). Nuestro propósito aquí es, pues, contestar a la pregunta: ¿Cómo se puede organizar y exponer el álgebra a los estudiantes de segunda enseñanza de modo que sea contemporánea en contenido y en espíritu; es decir, en tal forma que refleje el cuerpo de conocimiento que el álgebra abarca y muestre la unidad que ha llegado a ser característica de las matemáticas de hoy?



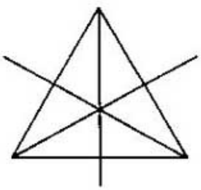
La respuesta es bastante obvia. Los conceptos fundamentales y las estructuras han de ser abordados al comienzo de una manera informal (concretamente) y más tarde, con creciente rigor y formalismo lógico. Al mismo tiempo la ejemplificación y aplicación de las estructuras (cuerpo: los números racionales) brindarán tareas que permitan adquirir la familiaridad y destreza de cálculo que se necesita en el mundo actual. En otras palabras, todo plan de estudios de álgebra tendrá que ser una *combinación* o *mezcla* de álgebra tradicional (eminentemente calculativa) y de teoría de las estructuras. Las directrices siguientes, a tono con las dadas en conferencias internacionales, como el Seminario de Royaumont, en 1959, y en el Grupo de Trabajo de Dubrovnik, en 1960, permitirán dicha mezcla.

1. Desarrollo del concepto de conjunto y operaciones con conjuntos, relaciones, aplicaciones y operaciones.
2. Aplicación de la teoría de los conjuntos y de las propiedades de ciertos sistemas operativos para establecer los conceptos de grupo, anillo y cuerpo.
3. La enseñanza de temas de álgebra tradicional, de aritmética y de geometría debe emerger del estudio de las propiedades de las estructuras fundamentales mencionadas.
4. Desarrollo del concepto de espacio vectorial y sus aplicaciones.

A modo de ilustración del tipo de plan que sugieren las líneas anteriores, se presentan los ejemplos siguientes, cuya tesis no es otra que la de poner énfasis en la estructura para fomentar aquella clase de actividades del álgebra tradicional ya aludidas, a la vez que se pone de relieve la unidad de todas las ramas de las matemáticas.

**Ejemplo 1.** En las primeras etapas, el estudiante entrará en contanto activo con sistemas operativos concretos, como las aritméticas finitas del reloj. Por ejemplo, estudiando la del reloj común y comparando sus propiedades con las de los números enteros, el estudiante advierte ciertas diferencias y semejanzas inmediatas. El estudio de otros sistemas finitos (rotaciones de un hexágono regular en torno al centro, la aritmética de otros relojes, etc.) indica también que ciertas propiedades son compartidas por todos ellos. El concepto de grupo, como estructura subyacente, se introduce como resultado de estas observaciones. Hecho esto, el estudiante puede resolver ecuaciones, inecuaciones, calcular expresiones y así sucesivamente, reconociendo que el dominio de las variables y las propiedades de los conjuntos subyacentes tienen gran importancia. En el plan del SSMCIS (capítulo 5) esto se logra durante los dos primeros meses del séptimo grado.

**Ejemplo 2.** Las íntimas relaciones entre el álgebra y la geometría pueden ponerse de manifiesto de varias maneras. Al comienzo se pueden utilizar las transformaciones del plano y un cierto subconjunto de tales transformaciones, como las isometrías (aquellas transformaciones que conservan las distancias). En el caso de las isometrías que aplican un triángulo equilátero sobre sí mismo, el estudiante tiene la oportunidad de analizar una figura geométrica desde el punto de vista algebraico. Examínese el siguiente diagrama. No es difícil advertir que una rotación del triángulo en el plano en sentido opuesto al de la rotación de las manecillas del reloj, de 0°, 120° o de 240°, alrededor de su centro, o bien la simetría respecto de cualquiera de sus bisectrices $R_a, R_b, R_c$, aplica el triángulo en sí mismo. El importante concepto de composición se puede introducir entonces para mostrar que el conjunto



$$S = \{r_0, r_{120}, r_{240}, R_a, R_b, R_c\}$$

con la operación de composición, constituye un sistema operativo. Si se define $r_{120} \circ R_a$ como una simetría respecto de $R_a$ seguida de una rotación en el sentido indicado de 120°, el estudiante puede entonces llenar la siguiente tabla operativa.

| $\circ$ | $r_0$ | $r_{120}$ | $r_{240}$ | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_0$ | | | | | | |
| $r_{120}$ | | | | | | |
| $r_{240}$ | | | | | | |
| $R_a$ | | | | | | |
| $R_b$ | | | | | | |
| $R_c$ | | | | | | |

El estudiante debe entonces investigar las propiedades de $(S, \circ)$ de acuerdo con la tabla precedente. Otra vez reaparece la estructura de grupo. Y este ejemplo nos presenta un sistema operativo donde no es válida la propiedad conmutativa.

**Ejemplo 3.** El concepto de aplicación (función) debe ser un elemento fundamental en todo programa de matemáticas. En este ejemplo se mostrará que este concepto permite tratar gran parte del contenido del álgebra tradicional. Defínanse las siguientes aplicaciones de los números racionales del conjunto (0, 1) en los números racionales, por:

$$f_i : (0, 1) \to Q; \qquad i = 1, \ldots, 6$$

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = 1 - x$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x - 1}$$

$$f_6(x) = \frac{x - 1}{x}$$



Valiéndose de la composición de funciones como operación, se puede obtener una tabla operativa semejante a la del Ejemplo 2. Aquí, además de repasar la destreza algebraica (para calcular $f_6 \cdot f_5$ es necesario saber simplificar

$$\frac{\frac{n}{n - 1} - 1}{\frac{n}{n - 1}}$$

que es $\frac{1}{n}$, o sea $f_6 \circ f_5 = f_3$), se puede examinar el concepto de isomorfismo de grupos comparando las tablas de los Ejemplos 2 y 3. De nuevo el estudiante tiene una buena *ocasión* de considerar, en un caso concreto, alguna de las estructuras fundamentales de las matemáticas actuales.

**Ejemplo 4.** El ejemplo que sigue sale a colación por varias razones. Primera, para volver a insistir que el concepto de espacio vectorial es de una importancia tal que debe ser presentado muy pronto en el desenvolvimiento estructural del álgebra en las escuelas secundarias. Las aplicaciones y la práctica que se deriven de esta estructura deben irradiar en todas direcciones y proporcionarán una base sólida a ulteriores desenvolvimientos. Segunda, para mostrar cómo se puede formular el concepto a partir de experiencias previas de los estudiantes. Y tercera, para ilustrar algunas de las actividades que pueden resultar de dicho concepto.

Durante los primeros años (digamos del grado 7° al 9°), el estudiante descubrirá e identificará grupos, anillos, dominios de integridad y cuerpos. Como resultado, su labor implicará cálculo con polinomios, matrices, funciones, diversos sistemas numéricos, ecuaciones, etc. Toda esta labor incitará a la definición de espacio vectorial. Adviértase que, al igual que antes, se parte de lo concreto.

Como se ha señalado ya, en esta etapa los estudiantes están habituados a buscar estructuras, y reconocen a la vez que su importancia, sus aplicaciones. El concepto de espacio vectorial se presenta, pues, a los estudiantes como una estructura más de gran peso en todas las matemáticas. El enunciado del concepto cristalizará como consecuencia de una revisión de las operaciones ya definidas con polinomios, matrices, funciones, etc., con el objeto de determinar algún "común denominador". En cada caso (con cierta ayuda), los estudiantes verán que, con respecto a las operaciones de adición y de multiplicación por un escalar (que asocia elementos del conjunto con elementos de un cuerpo), tienen

1. respecto de la adición (+), el conjunto, V, es un grupo conmutativo, y

2. respecto de la multiplicación por un escalar, que aparea elementos de un cuerpo, F, (según su experiencia, de los números reales) y de V, para dar un elemento de V, para todos los $v$, $w \in V$ y $f, g \in F$

   a. $(f \cdot g) \cdot v = f \cdot (g \cdot v)$

   b. $(f + g) \cdot v = f \cdot v + g \cdot v$

   c. $f \cdot (v + w) = f \cdot v + f \cdot w$

   d. $1 \cdot v = v$



Las abstracciones que anteceden rinden beneficios inmediatos. En el primer caso, enriquecen un tanto y unifican sectores que el estudiante conoce ya. En el segundo, el concepto tiene otras aplicaciones que también son de alguna importancia. En el campo de la geometría, se puede proseguir el estudio de la aritmética de los pares y de las ternas ordenadas --con lo cual se penetra en el estudio del espacio euclidiano desde el punto de vista de los espacios vectoriales. Un estudio de la noción de dependencia lineal conduce a conceptos de dimensión, base y a la totalidad de lo que se llama ahora álgebra lineal. Aquí, transformaciones y matrices (ambas ya estudiadas) se unen de una manera muy especial.

Los ejemplos que hemos visto muestran cómo sazonar el enfoque moderno del álgebra en las escuelas secundarias. Se advierte que todo plan de estudios que refleje la evolución del álgebra durante los tres últimos siglos tiene que colocar las estructuras como núcleo o tema central. Es también evidente que este enfoque contiene cuanto hay de esencial en el álgebra clásica, y que, además, brinda la oportunidad de poner de relieve la unidad de las matemáticas mediante la aplicación de los conceptos algebraicos a las demás ramas de aquéllas.

# 3

## LA HISTORIA DE LA GEOMETRÍA. GEOMETRÍA HOY

### INTRODUCCIÓN

El estudio de la geometría en las escuelas secundarias es uno de los puntos de controversia en las discusiones de matemáticos y educadores. Jean Dieudonné, entre otros, ha dicho que la geometría de Euclides debe ser abolida. En conferencias recientes se han considerado propuestas en favor de la adopción de sistemas de axiomas tendientes a conservar la enseñanza de la geometría euclidiana en las escuelas secundarias. Pero ¿qué función incumbe a la geometría en las escuelas secundarias? Y más importante todavía, ¿qué se entiende hoy por geometría?

Es bien sabido que la supervivencia de la geometría de Euclides se fundó en la creencia de que era la única disciplina a nuestro alcance que enfrentaba al estudiante a un sistema axiomático. Y esto era cierto hace un siglo. Sin embargo, recientes adelantos en asignaturas tales como el álgebra y la teoría de las probabilidades, permiten pensar, sin salirse de lo elemental, en la conveniencia de estudiar en el marco de la escuela secundaria estructuras axiomáticas distintas de la geometría tradicional. Como consecuencia, se está de acuerdo casi universalmente en que el curso dedicado a geometría debe ser modificado, si bien no hay conformidad en cuanto al grado de axiomatización que debe enseñarse en la etapa secundaria ni tampoco respecto a la vía o forma de presentación de la geometría, es decir, ¿ha de enseñarse como una versión modificada de la geometría sintética de Euclides, o bien mediante enfoques más recientes de estudio del espacio?



Uno de los propósitos de este capítulo es, por lo tanto, contestar a la pregunta: ¿Cuál es la concepción actual de la geometría?

Se puede llegar a una respuesta significativa mediante el examen de la historia de la geometría. Y esta respuesta sugerirá también respuestas a otros varios interrogantes. De un modo específico, llevará a un nuevo programa de geometría destinado a la segunda enseñanza que refleje los adelantos más recientes en la materia, así como el espíritu de las matemáticas contemporáneas.

### PRIMERAS NOCIONES

La historia de los orígenes de la geometría es muy parecida a la del origen del concepto de número, de la aritmética y del álgebra. Nacida de quehaceres prácticos (observación del sol y de otras estrellas, y de fenómenos físicos), así como de la necesidad de describir sus contornos, la mente humana conceptualizó muy lentamente formas geométricas concretas hasta que adquirieron un significado propio, independiente de las formas de los objetos materiales. Según la primera definición conocida, la geometría venía a ser algo así como la "medición de la tierra". Basándose en papiros como el de Moscú (c. 1850 a. de J. C.) y el Rhind (c. 1650 a. de J. C.) es posible formarse una idea de la clase de problemas que se solían resolver hace más de 3.000 años. Los 110 problemas resueltos en estos papiros son numéricos y 26 de ellos son geométricos; en su mayoría se refieren a cálculos de áreas y volúmenes. El papiro de Moscú contiene incluso una descripción correcta de la fórmula del volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada. La geometría siguió siendo una ciencia de cálculo por más de 1.000 años, antes de convertirse en una ciencia deductiva. Este paso se debe a los griegos.

## LA ERA EUCLIDIANA

Si bien la geometría alcanzó en Grecia el rango de ciencia deductiva antes de Euclides, la colección, síntesis y elaboración del contenido de los *Elementos* representa una de las grandes conquistas en la historia de las matemáticas. De hecho, por más de dos milenios nada se añadió a esta geometría que cambiase sus fundamentos en grado esencial hasta la publicación de los *Nuevos Elementos de Geometría*, de Lobachewsky, en 1835.

Es bien sabido que los *Elementos* no contienen la geometría euclidiana completa ni exponen lo que de ella contienen con intachable rigor lógico. Y esto no sorprenderá a nadie que sepa que los trece libros se escribieron alrededor de 325 a. de J. C., y que el original nunca se encontró. Sin embargo, es esencial discutir algunas de las dificultades lógicas de este tratado a fin de entender y apreciar recientes acontecimientos en la historia de la geometría.



La necesidad de aceptar sin definición ciertos términos iniciales a fin de poder edificar un cuerpo de doctrina sin caer en círculos viciosos, era desconocida tanto de los griegos en general como de Euclides en particular. La primera falla de su obra fue el intento de definir objetos o cosas tales como la línea recta (es una línea cuyos todos sus puntos "yacen uniformemente"), una arista (algo que es el extremo de cualquier cosa) y una superficie (algo que sólo tiene longitud y anchura). Como consecuencia de ello se deslizaron en el sistema euclidiano ciertas imperfecciones lógicas. Por ejemplo, ¿cómo se podría definir "yacer uniformemente"?

Un segundo defecto fue el de adoptar un sistema incompleto de postulados. No era posible demostrar todas las sentencias contenidas en los *Elementos* a partir de los postulados y de los términos no definidos de Euclides. También esta deficiencia lleva a ciertas paradojas bien conocidas, así como a inconsistencias, algunas de las cuales figuran a continuación.

A fin de tener la seguridad de que no se opera en un sistema vacío, es necesario postular la existencia de puntos y rectas. Por lo tanto, si se afirma que en todo plano hay por lo menos una recta, en cada recta por lo menos dos puntos y que no todos los puntos pertenecen a la misma recta, se puede entonces tener la certeza de que se trata de una geometría "bidimensional genuina". Como consecuencia, el problema de la existencia hace su aparición en la primerísima proposición del Libro Primero de los *Elementos*. Aquí Euclides considera el problema de construir un triángulo equilátero conociendo un lado (Fig. 5). Esta archiconocida construcción requiere la determinación de los puntos de intersección de dos circunferencias no concéntricas. ¿Quién nos garantiza que hay tales puntos de intersección? O bien se postula la existencia de los mismos, o se demuestra o deduce que existen partiendo de los postulados admitidos al comienzo. Puesto que la segunda alternativa o deducción no es posible en el sistema euclidiano, se necesita ampliar el número de postulados.

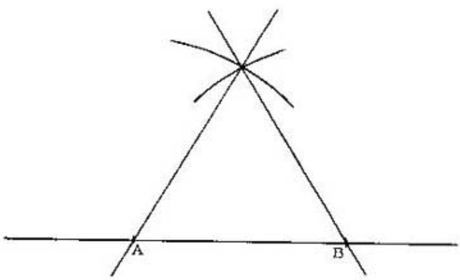



Fig. 5

Como segundo ejemplo de la insuficiencia de los postulados de Euclides, citaremos el bien conocido sofisma de que todos los triángulos son isósceles. El lector se percatará de que la omisión por Euclides del concepto de orden o de "entre" dos cosas dadas, como postulado, conduce a paradojas como ésta y también a cierto número de falsas demostraciones que de una manera tácita aceptan que una figura suplanta un postulado.

Dado el $\triangle ABC$

Demostrar $CA \cong CB$

Una de las maneras de enfocar el problema consiste en trazar la mediatriz AB, y la bisectriz del $\angle ACB$, y considerar los dos casos posibles: a) Si ambas rectas son paralelas, se tendrá como consecuencia $\angle A \cong \angle B$ y $CA \cong CB$ (mediatriz y bisectriz coinciden). b) Si no fuesen paralelas, llámese P a su punto de intersección. Trazando ahora las perpendiculares a CA y CB por el punto P, se puede demostrar que $\triangle PEC \cong \triangle PFC$, $\triangle PEA \cong \triangle PFB$, y $CE + EA \cong CF + FB$, ó $CA \cong CB$ (Fig. 6).

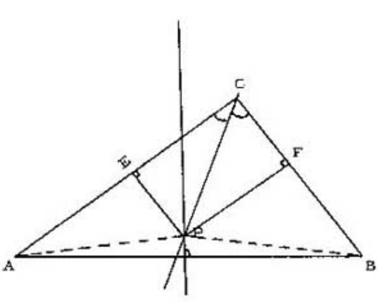



Fig. 6

La dificultad reside en el punto P. Una figura dibujada con esmero mostrará que P está "fuera" del $\triangle ABC$ y que uno sólo de los dos puntos E y F está "entre" los extremos de un lado del triángulo, de modo que, de hecho, $CA = CE + EA \neq CF - FB = CB$. (Véase la Fig. 7).

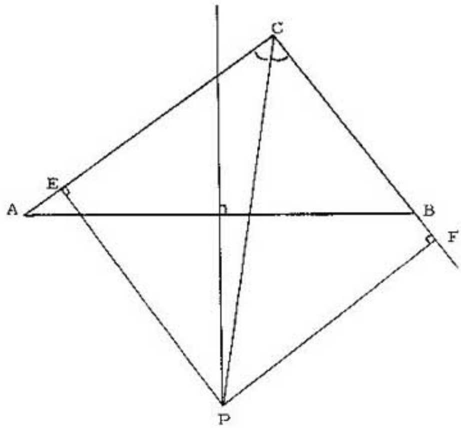



Fig. 7



Los postulados de Euclides nada dicen respecto del orden. No precisan cuando un punto se halla entre otros dos, ni distinguen los puntos interiores de los exteriores a un triángulo dado. El sistema es incompleto.

## GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

Las páginas que preceden han mostrado que tarde o temprano había que hacer algunas modificaciones a la geometría de Euclides. Uno de los primeros postulados que fue objeto de un análisis crítico fue aquel según el cual por un punto exterior a una recta pasa una, *y sólo una*, recta paralela a la primera (enunciado equivalente al quinto postulado de Euclides, y se debe a Playfair). Los matemáticos tenían la sospecha de que este postulado no era independiente de los restantes postulados, sino consecuencia de ellos. Por lo tanto, el postulado fundamental de la teoría de las paralelas vino a ser el punto de convergencia de los esfuerzos deductivos de algunos de los eminentes matemáticos del pasado (Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann). El simple hecho de haber incluido el postulado de las paralelas entre los que sirven de fundamento a su geometría, es la mejor prueba del genio de Euclides, (si bien hay indicios de que él mismo no estaba del todo seguro de la independencia).

Como es sabido hoy, si el postulado concerniente a las paralelas se reemplaza por el siguiente:

*Por un punto exterior a una recta pasan más de una recta que contienen a ese punto y que son paralelas a ella,* se puede construir una geometría *no euclidiana* (hiperbólica) perfectamente lógica. La creación de esta geometría fue la importante contribución de Bolyai y de Lobachevsky, quienes aprovecharon los esfuerzos de aquéllos de sus predecesores que pretendieron demostrar el postulado de Euclides a partir de los postulados restantes por ignorar que se trata de una imposibilidad. Conviene hacer constar, sin embargo, que Lobachevsky empezó su labor siguiendo el rumbo de los demás. Admitió el postulado (1) y los restantes de los *Elementos* y entonces empezó a deducir o demostrar teoremas. Si en el curso de sus razonamientos llegaba a alguna contradicción, ello sería prueba indirecta de la falsedad del postulado. Mas como tal contradicción no surgió, Lobachevsky concluyó

(1) que el postulado de las paralelas no se puede demostrar a partir de los demás postulados de Euclides.

(2) que se puede edificar una geometría, que si bien parece contradecir nuestra intuición, es lógicamente válida o compatible consigo misma.

La clara consecuencia de estos dos asertos es:

¡HAY MÁS DE UNA GEOMETRÍA!

Es interesante tener en cuenta que muy rara vez se debe a una sola persona un notable adelanto científico como el que se acaba de mencionar. Entre los grandes matemáticos a quienes preocupó este asunto se hallan Johann Bolyai, Taurinus, Legendre, d'Alembert, Schwerkort, Lagrange, Gauss y Saccheri. Este último obtuvo los resultados de Lobachevsky cerca de un siglo antes y fue quien se anticipó en la aplicación del método indirecto de demostración al análisis del postulado de las paralelas. Tampoco él pudo llegar a una conclusión contradictoria a partir de los postulados, pero no reconoció el alcance de sus hallazgos. En efecto, Saccheri dedujo muchos de los teoremas que más tarde llegaron a ser parte de la geometría hiperbólica. Por desgracia, nunca admitió la posibilidad de la falta de contradicción en el camino emprendido, y como consecuencia no se le reconoce la paternidad del descubrimiento de la geometría no euclidiana. Este honor hay que otorgárselo, por lo tanto, a Nikolai Lobachevsky y a Johann Bolyai; éste, independientemente, publicó sus conclusiones tres años después de dar aquél a conocer las suyas.



Los matemáticos de entonces no aceptaron fácilmente estas investigaciones. Sólo después de la publicación de *"Las Hipótesis que Constituyen el Fundamento de la Geometría"*, por Bernhard Riemann --el texto de una conferencia dada en 1854 y no publicada hasta 1868, ya muerto su autor-- empezaron los matemáticos a reconocer espacios geométricos distintos del de Euclides. En esta publicación, Riemann no sólo generalizó el concepto de espacio al considerar varios espacios métricos de $n$ dimensiones, sino que hizo posible la creación de otras geometrías no euclidianas de tipo sintético mediante la sustitución del postulado de las paralelas por este otro:

(2) Dos rectas cualesquiera situadas en un plano se cortan.

También ahora, al igual que a partir del postulado (I), se pudo construir una geometría (elíptica) perfectamente lógica. En este mismo texto, su autor señaló algunas de las inconsistencias del *corpus* euclidiano y con ello inició una época nueva en la historia de la geometría de Euclides: la era del perfeccionamiento de los *Elementos*. Este punto se discutirá en la sección que sigue.

Consecuencia inmediata de la publicación de la conferencia de Riemann fue un torrente de investigaciones en las que dominaba el afán de crear nuevas geometrías. Sobre todas ellas proyectó Félix Klein una luz nueva al aplicar la teoría de los grupos de transformaciones para clasificarlas. Este aporte merece especial atención aquí porque representa una de las principales tendencias de las matemáticas actuales: la de unificar sus distintas ramas. La labor de Klein revela un aporte efectivo del álgebra al estudio de la geometría.

## EL PROGRAMA ERLANGEN

En 1872, Klein en su *Programa Erlangen,* expone cómo pueden considerarse distintas geometrías desde el punto de vista de las propiedades de los espacios que subsisten o permanecen inalteradas al aplicar a sus figuras respectivas ciertos grupos de transformaciones. Cada geometría está determinada por un grupo; cada grupo determina una geometría. (Este aserto debe ser modificado hoy.)



A modo de ejemplo, considérese el conjunto S de las transformaciones de un plano consistentes en simetrías o reflexiones, rotaciones, traslaciones y la transformación idéntica o identidad. Se demuestra que S es un grupo observando que, respecto de la operación composición, S es cerrado, que cada elemento de S tiene un inverso en S y que la operación es asociativa. Se puede demostrar que tales transformaciones conservan las distancias, los ángulos, la colinealidad y el paralelismo. Por ejemplo, para demostrar que la simetría respecto de un eje $l$ deja invariante las distancias, consideremos lo siguiente.

Sea un sistema de coordenadas en el plano con $l$ como uno de los ejes, y cualquier otra recta $l'$, perpendicular a $l$, como el otro eje (Fig. 8).

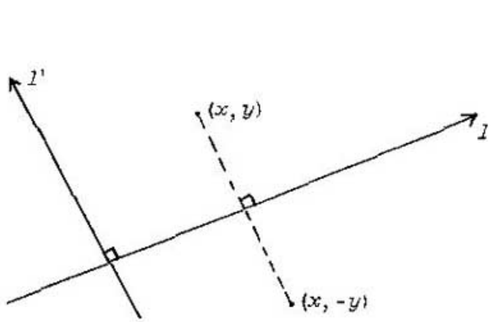



Fig. 8

Entonces, con respecto al eje de simetría $l$, las coordenadas del simétrico del punto $(x, y)$ vienen dadas por

$$(x, y) \longrightarrow (x, -y).$$

Para demostrar que la distancia entre dos puntos es invariante respecto de una simetría, supongamos que $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano. En tal caso, tras la aplicación de una simetría respecto del eje $l$ a ambos puntos, tenemos

$$A(x_1, y_1) \longrightarrow A'(x_1, -y_1)$$

$$B(x_2, y_2) \longrightarrow B'(x_2, -y_2)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

$$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2}$$

o sea $AB = A'B'$.

La geometría resultante caracterizada por S, es la geometría métrica euclidiana del plano, cuyo objeto es el estudio de las propiedades invariantes respecto del grupo S.

Las geometrías tratadas desde el punto de vista de las transformaciones se pueden estudiar fácilmente mediante los métodos de la geometría analítica; un ejemplo de ello es la demostración dada para la invariancia de la longitud de un segmento respecto de la simetría. También se puede utilizar el método de las matrices. Estos dos hechos corroboran una vez más que la unidad es una de las características destacadas de las matemáticas del siglo XX. Para ilustrarlo, consideremos un espacio euclidiano referido a los ejes de coordenadas $x$ e $y$. Examínese la tabla siguiente.

| Transformación | Regla de Transformación de Coordenadas | Representación Matricial |
|---|---|---|
| 1. Idéntica | $(x, y) \longrightarrow (x, y)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 2. Simetría respecto del eje $y$ | $(x, y) \longrightarrow (-x, y)$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3. Simetría respecto del eje $x$ | $(x, y) \longrightarrow (x, -y)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 4. Simetría respecto de la recta $y = x$ | $(x, y) \longrightarrow (y, x)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

(1) La fórmula de la distancia de dos puntos del plano cartesiano se obtiene bien postulándola, o postulando el teorema de Pitágoras.

| Transformación | Regla de Transformación de Coordenadas | Representación Matricial |
|---|---|---|
| 5. Rotación de 90° de sentido contrario al de las agujas del reloj, con centro en el origen | $(x, y) \to (-y, x)$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 6. Una traslación de 3 unidades sobre el eje $x$ y 2 unidades sobre el eje $y$ | $(x, y) \to (x+3, y+2)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 7. Una simetría respecto al eje $x = 3$ seguida de una rotación de 270° en sentido contrario al de las agujas del reloj, con centro en el origen | $(x, y) \to (y, x-6)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ |
| 8. Una rotación de $\theta$ grados seguida de una traslación de $a$ unidades sobre el eje $x$ y de $b$ unidades sobre el eje $y$. | $(x, y) \to (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta + a,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta + b)$ | $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & a \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & b \end{pmatrix}$ |



## EL PERFECCIONAMIENTO DE LA GEOMETRÍA DE EUCLIDES

Tras el descubrimiento de las geometrías no euclidianas y de la identificación por Riemann de la deficiencia de la creación de Euclides, algunos matemáticos concentraron sus energías en la selección de un conjunto mínimo de axiomas, completo e independiente, que permitiera situar la geometría de Euclides sobre una base lógica intachable. De este modo las inconsistencias, las paradojas y los supuestos o postulados ocultos quedarían eliminados.

Esta tarea fue llevada a cabo en 1882 por Moritz Pasch. Y la continuaron muy pronto Peano, Pieri y otros miembros del grupo "Formulaire" (un grupo antecesor del Bourbaki de nuestros días).

El período de perfeccionamiento de la geometría de Euclides culminó en 1899 con la famosa obra de David Hilbert *"Grundlagen der Geometrie"*. Los que abogan por la reforma del plan de estudios de geometría mediante un conjunto de axiomas "completo" se valen de ciertas modificaciones de los axiomas de Hilbert. Sus supuestos fundamentales corrigen muchos de los errores de Euclides ya citados y sin duda constituyen uno de los jalones en la historia de la geometría euclidiana. Se dividen en cinco categorías, esto es, axiomas de conexión (incidencia), de orden, paralelismo, congruencia y continuidad (axioma de Arquímedes). Conviene notar que Hilbert no elaboró un texto equivalente a la secuencia de la geometría de Euclides, pero sí mostró cómo era posible hacerlo.

Con la publicación de *"Los Fundamentos de la Geometría"* de Hilbert, el problema del perfeccionamiento de los *Elementos* de Euclides quedó resuelto. La solución, sin embargo, era demasiado difícil para ser empleada como geometría para la escuela secundaria. De aquí que un cierto número de matemáticos orientasen sus esfuerzos hacia la creación de sistemas equivalentes de axiomas, en especial basándose en las propiedades de los números reales, lo que permitiría un tratamiento menos arduo de la materia.

Una de las modificaciones más significativas de los axiomas de Hilbert la hizo G. D. Birkoff en los últimos años de la década 1920-30. Consiguió una gran economía en el número de axiomas que antes debían ser admitidos mediante la sustitución de las propiedades de orden y completitud del conjunto de los números reales por algunos axiomas de orden y continuidad. En 1940, en colaboración con Ralph Beatley, presentó una versión de sus esfuerzos que fue aceptada para la enseñanza en las escuelas secundarias. Esta versión simplificada sirvió de base a muchos textos de geometría para dichas escuelas que incorporan postulados de "regla" y "trasportador".



## LA GEOMETRÍA HOY

En las páginas precedentes se ha intentado dar una ligera idea de la evolución de la geometría euclidiana a lo largo de 2.000 años, y reconocer algunas de sus consecuencias. Sin embargo, el lector advertirá que no se hizo mención de algunas de las llamadas geometrías que fueron surgiendo durante este período (la proyectiva, la afín, etc.). Esto está a tono con el punto de vista que se ofrecerá aquí, es decir, que la geometría hoy debe definirse como *el estudio de espacios*. Como consecuencia, sería inútil el intento de enumerar otras geometrías sintéticas o no sintéticas, porque al hacerlo, otras quedarían fuera de la cuenta. La histórica publicación de Riemann se ha encargado de ello.

Esta nueva definición de la geometría ha ido emergiendo poco a poco durante los últimos 140 años como consecuencia de dos fenómenos. El primero y más notable fue el descubrimiento y exposición por los matemáticos de geometrías sintéticas no euclidianas, de "espacios" tales como los topológicos, vectoriales, de Banach, pre-Hilbert y Hilbert. El segundo fenómeno y de más influjo ocurrió como consecuencia de los adelantos científicos y técnicos. Antes de 1900, si bien los matemáticos puros conocían otras, la única geometría en verdad aplicada era la de Euclides. La llegada de la teoría de la relatividad vino a cambiar este estado de cosas. Tras demostrar Einstein que la existencia de materia en un sistema espacio-tiempo se describe mediante un modelo tetradimensional del espacio de Riemann, se halló que varias otras especies de geometrías no euclidianas tenían aplicaciones en disciplinas tales como la física, la astronomía, la biología y la economía. Como consecuencia, hoy día la geometría de Euclides no se utiliza mucho ni en matemáticas puras ni aplicadas (salvo por ciertos fundamentalistas). Esta geometría es justamente una de tantas y suponer lo contrario equivaldría a negar todo lo ganado en más de una centuria, tanto en matemáticas como en otras ciencias.

Lo que el desenvolvimiento y aplicación de nuevas geometrías implica --esto es, nuevas caracterizaciones de varias clases de espacios-- no ayuda, pero tiene importancia para la organización y la manera de exponer la geometría en las escuelas secundarias. Estas consecuencias implícitas se consideran en la siguiente sección.

## GEOMETRÍA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

Los educadores están ahora empezando a comprender que la geometría no es hoy lo que solía ser hace cosa de 2.000 años, ni siquiera lo que era hace sólo 200 años. Sin embargo, este reconocimiento no resuelve el problema: "¿Qué se debe enseñar de esta disciplina en las escuelas secundarias y con qué grado de rigor?" Por suerte, tenemos ciertas directrices emanadas de dos conferencias notables a este respecto.

En el Seminario de Royaumont, celebrado en noviembre de 1959, se señalaron las metas siguientes respecto a la enseñanza de la geometría (tal como aparecen en *New Thinking in School Mathematics).*



1. Desarrollar el concepto de espacio como un conjunto con subconjuntos especiales, que poseen estructuras vinculadas con otras; tener en cuenta espacios afines, euclidianos y vectoriales.

2. Desarrollar las relaciones precisas entre la recta y el conjunto de los números reales.

3. Desarrollar la comprensión de las transformaciones principales aplicables a diferentes geometrías y grupos de transformaciones, en especial con respecto a los espacios afines y euclidianos.

4. Desarrollar la comprensión de la estructura axiomática en este orden: la recta afín, el plano afín, el espacio euclidiano y el espacio vectorial.

5. Desarrollar destreza en la aplicación de diversos métodos de desenvolvimiento geométrico a la solución de problemas originales, tanto de índole matemática como de aplicación en otros campos.

En la conferencia de Dubrovnik (agosto de 1960), se propusieron temas de estudio específicos destinados a alumnos de segunda enseñanza, en los que se refleja el espíritu del esquema precedente. Entre estos temas se hallan las transformaciones, ciertos grupos de transformaciones, la geometría afín, el espacio euclidiano, las cónicas, vectores y espacios vectoriales, así como la aplicación de todo lo anterior en otras áreas de estudio. En el capítulo 5 se mencionan en detalle estos temas.

Hay que admitir que todo programa de geometría que pretenda incorporar los temas mencionados, debe abarcar del grado 7 al 12, ambos inclusive. También reconocerá el lector que la geometría sintética brilla por su ausencia, no se hace referencia a ella. Y esto es lo natural: el espacio euclidiano, y no la geometría de Euclides, es un tema central de las matemáticas: sus propiedades ofrecen un medio de generalizar otras ramas de las matemáticas y deben ser un tema central de todo programa de geometría. Como se indicó anteriormente, la geometría de Euclides está en un punto muerto; lo alcanzó en 1899 cuando Hilbert la estableció sobre una base lógica. No tiene otro sitio a donde ir.

Nosotros no somos, sin embargo, de la opinión de que la geometría sintética esté muerta. Todavía subsiste la necesidad de que el estudiante tenga una confrontación con un sistema geométrico lógico, deductivo, sin necesidad de tener que dedicarle todo un curso. Una manera de conseguirlo, y al mismo tiempo de echar las bases para estudios ulteriores, es estudiar geometría afín. Los fines de tal estudio son:

(1) hacer ver a los estudiantes que todo sistema deductivo (geométrico) debe empezar por un conjunto de términos primitivos y de postulados, que durante el desarrollo del sistema permanecen indefinidos e indemostrables, respectivamente.



(2) mostrar que la teoría puede aceptar diversas interpretaciones a medida que los estudiantes investigan algunos modelos no geométricos de los axiomas.

Como sostiene Karl Menger en *"La Geometría Apropiada a la Enseñanza Actual"* (the Geometry Relevant to Modern Education), los estudiantes también aprenderán:

(3) que dado un conjunto de postulados, ciertos teoremas pueden ser demostrados, pero también que otros no pueden serlo a partir de dichos axiomas.

(4) que es posible modificar los postulados de una teoría hasta construir otra, incompatible con la anterior, aunque consistente consigo misma.

Como ejemplo de esto, considérese el enfoque adoptado por el Estudio del Mejoramiento del Plan de Estudios de las Matemáticas de la Escuela Secundaria (SSMCIS), al presentar los elementos de la geometría plana afín en el grado octavo. Al estudiante se le presentan tres axiomas.

**Axioma 1.** a. El plano $\pi$ es un conjunto de puntos y contiene por lo menos dos rectas.

b. Cada recta del plano $\pi$ es un conjunto de puntos que contiene por lo menos dos puntos.

**Axioma 2.** Por cada dos puntos del plano $\pi$ pasa una, y sólo una, recta que los contiene.

**Axioma 3.** Por cada recta $m$ y punto E del plano $\pi$, hay una recta, y sólo una, que contiene el punto E y es paralela a $m$.

A continuación, los estudiantes tratan de obtener algunas consecuencias lógicas de estos axiomas demostrando (no todos a la vez) un total de 16 teoremas. Entre los axiomas y teoremas se intercalan siete "modelos" distintos de los primeros. Estos modelos se amplían a continuación mediante el examen de "vectores geométricos" en el plano. El lector advertirá que esta manera de enfocar la materia permite al estudiante formarse idea, en un plazo *razonable*, de lo que es un sistema geométrico deductivo o axiomático.

Opuestas a las observaciones hechas respecto de la geometría euclidiana son las que cabe hacer concernientes a los espacios vectoriales. El concepto de espacio vectorial es ahora una idea (o "piedra") fundamental para construir muchas de las "nuevas" facetas de la matemática y de otras ciencias. Jean Dieudonné expresó la opinión de que no puede haber una geometría elemental separada del álgebra lineal; y, en consecuencia, del espacio vectorial. George Papy, en *Mathématique Moderne*, I, destinada a los estudiantes de 12-13 años de edad, adopta el concepto de espacio vectorial en los primeros capítulos. Y en *Mathématique Moderne*, II, depende por completo de dicho concepto.



A modo de ilustración de la importancia de dicho concepto, considérense las etapas siguientes. A partir de un espacio vectorial se puede definir un producto interno, a fin de obtener un espacio con producto interno. Se puede ampliar más esta estructura mediante la consideración de la norma, que se deriva del producto interno ($\|x\| = \sqrt{(x, x)}$), y ahora tenemos un espacio vectorial normado. De acuerdo con la función que define el producto interno y el conjunto subyacente (espacio vectorial), se obtienen varios espacios por este procedimiento.

Por ejemplo, si se parte de $R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \text{Reales}\}$ y se define

1. $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

2. $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ donde $\alpha \in$ Reales.

Entonces el conjunto precedente, con las operaciones definidas constituye un espacio vectorial. Ahora si el producto interno se define por

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i, \text{ se sigue}$$

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3))} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

La distancia entre dos puntos cualesquiera, digamos $(x_1, x_2, x_3)$ y $(y_1, y_2, y_3)$ resulta

$$\|(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

De este modo el lector puede ver que, a partir del concepto de espacio vectorial como estructura fundamental, se llega de hecho a un espacio euclidiano. Partimos de una estructura algebraica y llegamos a una interpretación geométrica de ella. Esta interpretación proporcionará al estudiante una oportunidad de estudiar el espacio euclidiano desde un punto de vista algebraico. Para ver cómo esto se puede hacer, considérese lo siguiente.

Los conceptos de generación, de dependencia lineal y de base pueden presentarse en el marco de los espacios vectoriales de tres dimensiones. Si $A = (1, 2, 3)$, el conjunto de los productos escalares $tA = \{t(1, 2, 3): t \in$ $\in$ Reales$\}$, se dice que es generado por $(1, 2, 3)$. Dos elementos cualesquiera de este conjunto son linealmente dependientes. Además, desde un punto de vista geométrico, resulta que $tA$ es una recta en un espacio de tres dimensiones (Fig. 9).

| $t$ | $tA$ |
|---|---|
| -1 | (-1, -2, -3) |
| 0 | (0, 0, 0) |
| 1 | (1, 2, 3) |
| 2 | (2, 4, 6) |
| ⋮ | ⋮ |
| $t$ | $(t, 2t, 3t)$ |
| ⋮ | ⋮ |

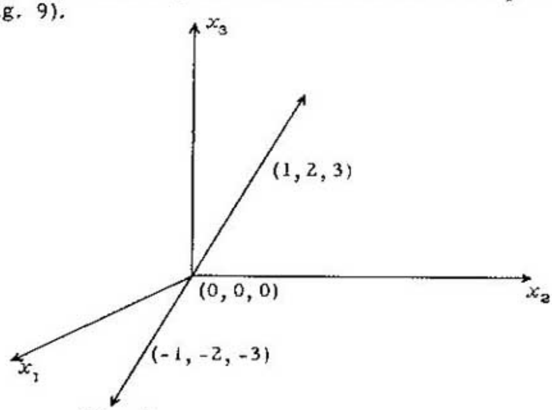



Fig. 9

La ecuación $X = t(1, 2, 3)$, $t \in R$, se llama la ecuación vectorial de la recta. Nótese que al asignar valores a $t$, se determinan vectores (ternas ordenadas) que pertenecen a la recta. Además, variando los valores de $t$ la ecuación vectorial permite describir fácilmente segmentos, semirrectas y otros subconjuntos de la recta. En este caso, $Y = t(1,2,3)$, donde $0 \leq t \leq 1$, describe el segmento cuyos extremos son $(0, 0, 0)$ y $(1, 2, 3)$. La generalización de esta idea a las rectas que no pasan por el origen de coordenadas obliga al estudiante a recordar el concepto de traslación. De manera similar, se pueden obtener las ecuaciones de planos, semiplanos y otras figuras.

Los ejemplos anteriores ponen de relieve tanto las posibilidades como el espíritu de las matemáticas actuales. La importancia que concede a los conceptos básicos, tales como los de conjunto, relación y operación, y el estudio de las estructuras fundamentales, como los grupos y espacios vectoriales, unifican *todas* las matemáticas. Hay que procurar captar este espíritu mediante el estudio de la geometría en la escuela secundaria.

Un enfoque actual de la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria debe, por lo tanto, contemplar varios puntos de vista que reflejen los adelantos más recientes tanto en la geometría misma como en otras ramas de las matemáticas. Este enfoque debe tener en cuenta la desaparición de las barreras que tradicionalmente separaban las diversas ramas de las matemáticas. Al mismo tiempo hay que reconocer que existe un problema respecto de la axiomatización: ¿Cuánta?

# 4

## APLICACIONES DE LAS MATEMÁTICAS

### INTRODUCCIÓN

Si las matemáticas no fueran útiles, habrían desaparecido ya del plan de estudios de los centros docentes de todas las categorías. En estos momentos es la utilidad de las matemáticas lo que les otorga preeminencia en los programas escolares. Con todo, aunque parezca extraño, muchas de las reformas recientes de los programas de matemáticas tienden a la enseñanza de éstas como un cuerpo de doctrina independiente, abstracto y teórico. Se trata de una situación alarmante, que carece de remedio inmediato, si bien los matemáticos, los hombres de ciencia y los educadores en general vienen ahora prestándole atención con el objeto, por lo menos, de esclarecer el problema.

La frase "aplicaciones de las matemáticas" tiene dos significados distintos: uno, la utilización práctica de la teoría matemática en otras áreas del saber ajenas a las matemáticas, y el otro, el uso de un teorema propio de una rama de las matemáticas para enriquecerla más aún o para aplicarlo en cualquier otra rama de las matemáticas. Todos los profesores de matemáticas están familiarizados con la segunda acepción de la frase, por cuanto es muy común, tanto en la enseñanza en las escuelas secundarias como en las universidades. En este capítulo, nos limitaremos principalmente al primero de los dos significados, o sea a la aplicación de las matemáticas en la vida diaria y en otras esferas de conocimiento, a fin de resolver problemas genuinos de cada una. Por genuino se entiende un problema que se presenta en una situación natural y demanda una respuesta desconocida hasta entonces.



### INTERVENCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS EN OTRAS CIENCIAS

En años recientes, la enseñanza de las ciencias, en especial en Europa y en Estados Unidos, se ha hecho más formal y más matemática. Los cursos de física, como el diseñado por el Comité de Ciencias Físicas Escolares (Physical Science School Committee)* son más técnicos que antes y destacan conceptos y leyes en una explicación estructurada, teórica y matemática del mundo físico. Los cursos de Valencia Química (Chemical Bond) requieren explicación abstracta, casi matemática del comportamiento de la materia, tanto orgánica como inorgánica. La teoría celular, en biología, se está desplazando más y más hacia una descripción matemática de los seres vivos, de manera análoga a lo que sucedió en el desenvolvimiento de la física atómica. Las teorías de los procesos económicos se han absorbido en explicaciones probabilísticas y en la teoría de matrices, que compiten en complejidad con las expli-

---

* Physics, P.S.S.C., D.C. Heath and Co., 1960.

caciones físicas, por ejemplo. Y otro tanto ocurre en astrofísica, astronomía, geología, sociología y muchas otras "logías" de gran importancia en estos momentos. Esto contrasta con la autolimitación de fronteras que se observa en muchos de los nuevos programas de matemáticas.

A comienzos del presente siglo la relación entre las matemáticas y las *pocas* otras ciencias era escasa. En efecto, en 1903, al ser fundada la Asociación Central de Profesores de Ciencia y Matemáticas (Central Association of Science and Mathematics Teachers), uno de sus fines declarados fue "obtener una correlación mayor de las matemáticas y demás ciencias consigo mismas y con otras asignaturas del plan de estudios". Incluso en fecha tan temprana como 1901, E.H. Moore, de la Universidad de Chicago y a la sazón presidente de la Sociedad Matemática Americana (American Mathematical Society) propuso un sistema de laboratorio de enseñanza de las matemáticas y la física. Era su deseo "organizar la enseñanza del álgebra, la geometría y la física de la escuela secundaria según un plan enteramente coordinado de cuatro años".

Al mismo tiempo (alrededor de 1903), la enseñanza de la aritmética, del álgebra, geometría y trigonometría se enriqueció con muchos ejemplos de orden social y físico. De hecho, los programas de física, de geografía física, de cosmografía y comercio utilizaban las matemáticas de la misma manera que se hacía en las clases de matemáticas y encontraban en ellas un medio satisfactorio de exponer su propio contenido. Con todo, la biología, la historia y la economía y otras asignaturas de la escuela secundaria poco o ningún uso hacían de las ciencias exactas.



Durante los últimos cincuenta años, a consecuencia de los grandes progresos en las ciencias en general y en las matemáticas en particular, y al mismo tiempo a consecuencia de los adelantos en didáctica matemática, se produjo una separación de métodos y un deslinde de asignaturas. En estos momentos se nota una creciente preocupación por parte de gran número de educadores y de hombres de ciencia en pro de obtener una armonía y relaciones mutuas entre las matemáticas y las otras esferas del saber en que tienen aplicación. El escepticismo reinante en cuanto a tal unificación puede deberse a que los profesores de ciencias desconocen en parte el contenido y el espíritu de las matemáticas contemporáneas, y a que la gran mayoría de los profesores de matemáticas no saben o no entienden los grandes avances hechos en ciencia y en tecnología.

Hay hombres de ciencias y profesores universitarios que aún hoy insisten en que lo que importa de las matemáticas son aquellos de sus aspectos que pudiéramos llamar instrumentales y operacionales. Se resisten a admitir una enseñanza de las matemáticas en la que se acentúe sobre todo lo conceptual y lo formal de los sistemas axiomáticos. Los hay que llegan incluso a rechazar la importancia concedida actualmente a los conjuntos, relaciones, estructuras y así sucesivamente, por haber contribuido muy poco a la enseñanza de las ciencias en general. El solo aspecto que consideran útil es el que atañe a la computación digital y a la programación lineal. Su punto de vista, sucintamente resumido, es: Préstese más atención a los aspectos intuitivos de la materia y enséñese a los alumnos el mayor número posible de sus aplicaciones, en especial respecto a la física.

Hay, por otra parte, un creciente número de hombres de ciencia que, en su investigación y en su enseñanza, dependen más y más de modelos matemáticos, sobre todo de índole moderna. Cuando se proponen construir un cuerpo estructurado de saber, de su especialidad, recurren fundamentalmente a los aspectos estructurales de la matemática. No se trata de físicos relativistas solamente, sino de biólogos moleculares, de estadísticos industriales, de psicólogos del comportamiento, de investigadores operacionales, de administradores de negocios, y de otros parecidos. Estas personas reclaman de las escuelas una enseñanza más profunda, más amplia, más abstracta y de contenido más estructurado que nunca. La cuestión con que nos enfrentamos realmente es: "¿Cuál es nuestra responsabilidad en este asunto?"

Por definición, al profesor de matemáticas incumbe enseñar matemáticas. Sin embargo, a los buenos profesores de matemáticas de las escuelas secundarias también les interesa la educación liberal general de sus estudiantes, aquella que contribuye a la formación de hábitos y actitudes, de mucho mayor alcance que la mera adquisición de conocimientos como un fin en sí. A estos profesores les interesa el conocimiento intuitivo que las matemáticas pueden proporcionar al estudiante en otras esferas científicas, a la vez que no desconocen la ayuda que otras materias brindan, como estímulo o acicate, para profundizar el estudio de las matemáticas.



Hay buenas razones para que se piense en el plan de estudios como una totalidad, donde cada materia se halle en la más íntima relación posible con todas y cada una de las restantes. Y todavía hay razones de más peso en favor de que las matemáticas y las demás ciencias contenidas en dicho plan se vinculen y unifiquen en una sucesión de etapas, a lo largo de la enseñanza secundaria. Pero en el plano de la enseñanza secundaria, razones poderosas requieren que tanto las matemáticas como las demás asignaturas conserven su individualidad como tales, es decir se mantengan separadas. La más significativa de tales razones es la natural limitación del intelecto humano, el cual no puede abarcar sino una pequeña fracción del saber acumulado, y hoy día sólo cabe esperar que unos cuantos profesores excepcionales adquieran una comprensión satisfactoria de más de una de las disciplinas principales. Y por tanto, ¡zapatero a tus zapatos! El profesor de matemáticas, aun cuando aplique éstas a asignaturas distintas y a veces se valga de éstas para acrecentar el interés de sus estudiantes, ha de insistir en que su principal función es enseñar matemáticas, y enseñarlas como sólo un experto en contenido y métodos puede hacerlo.

## CONTRIBUCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS AL APRENDIZAJE DE OTRAS MATERIAS

Al considerar la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de su utilidad, es necesario tener también en cuenta las necesidades y las opiniones de aquellos que las utilizan. Es frecuente la queja de los profesores de ciencias de que sus estudiantes se hallan faltos de la preparación matemática necesaria para el estudio de tales ciencias, o bien de que no saben cómo aplicar lo aprendido. Estas quejas no pueden ser desoídas fácilmente. Si las matemáticas necesarias para el estudio de las ciencias en cualquier grado no figuran en el plan de estudios, se impone un examen de si es o no es posible incluirlas en él a tiempo para su oportuna aplicación. No se debe olvidar que hay etapas en el estudio de las matemáticas que van desde la mera explicación espacial o numérica de un fenómeno observable, a la comprensión intuitiva de un concepto, a la familiarización superficial con un asunto razonado en cierto grado, hasta el conocimiento riguroso a través de un planteo axiomático. Puede decirse que cualquier tema matemático se presta a ser expuesto en cualquiera de estos niveles de modo que resulte aplicable en el estudio de otras disciplinas.

A manera de ejemplo de la colaboración necesaria, citemos el estudio de la biología actual en el grado décimo, el cual requiere la aplicación de logaritmos, de potencias de 10 y de notación científica. Por lo general, en los planes típicos de matemáticas, estas nociones se suelen enseñar en el grado 11, demasiado tarde pues para la enseñanza de la biología. El plan de estudios de matemáticas puede ser modificado de modo que estos temas se enseñen con la necesaria antelación para utilizarlos en el estudio de las ciencias. Si, por otra parte, se los enseña en el grado 9, pero los estudiantes son incapaces de aplicar lo aprendido, entonces es cosa de averiguar *cómo* aprenden los estudiantes sus matemáticas.



Sean cuales fueren los aspectos de las matemáticas --modernas, abstractas o aplicadas-- su estudio puede contribuir al de las demás ciencias.

Por ejemplo, matemáticas y biología pueden ayudarse en gran medida, y si bien esto no resulta claro a partir del origen y propósito de las dos asignaturas, se evidencia si se tiene presente de qué manera las matemáticas han penetrado en la didáctica de las ciencias naturales. En la medida en que las matemáticas constan de abstracciones del mundo viviente, y la biología aplica estos términos y relaciones matemáticas a la descripción de ciertos fenómenos, las dos ciencias se identifican más y más. Mientras la biología se limite a descripciones verbales y a clasificaciones, no puede llamarse matemática; pero en cuanto se ocupa de medidas, de análisis estructural y de categorizaciones cuantitativas, se convierte en matemática. Por otra parte, las matemáticas se alejan más y más de la física y de la biología al despojar a sus elementos de cualquier significado (o acepción) física y circunscribirse a puras estructuras axiomáticas.

Advirtamos que las matemáticas y la física de las escuelas secundarias rara vez alcanzan el grado de abstracción que las convierte en disciplinas independientes. En consecuencia, en el plano secundario, la principal preocupación consiste en describir cuantitativamente (numérica y espacialmente) los fenómenos, sin ir más allá de la intuición o de una lógica primaria. El significado del término "intuición" se traduce por "aquello que se puede ver, oir, tocar o sentir", que lleva a "intelección inmediata" y se puede describir explícitamente mediante las matemáticas que el estudiante aprende en la escuela.

En un artículo publicado en 1966, M. Legay* indicó tres niveles en que las matemáticas pueden aplicarse al estudio de la biología. Estos niveles son válidos en el estudio de todas las demás asignaturas. Legay los caracterizó como *descriptivo, explicativo* y de *organización*. Nosotros anteponemos un cuarto nivel, que es el de *registros computados*.

En las escuelas secundarias de hoy los niveles descriptivo y de cómputo son los únicos en evidencia en la enseñanza de las ciencias. Sin embargo, los especialistas en matemáticas aplicadas insisten en que, en las escuelas secundarias, también debe introducirse el nivel explicativo, y que se deben dar los pasos preliminares para la aplicación del nivel de organización. A continuación se dan ejemplos para aclarar aún más el significado de cada categoría.

Nivel de cómputo. Aquí se presenta una regla o fórmula, y se pide a los estudiantes que hagan los cálculos necesarios y con los datos obtenidos efectúen una representación gráfica. No se intenta justificar la fórmula racionalmente. Así, en un texto de biología se dice que "El crecimiento ilimitado de una población de un determinado animal P en $t$ años es dado por la fórmula $P_t = k \cdot tN$, donde $k$ es una constante, y N la población actual, y que si dicha población es controlada, lo es por un factor

$$C_t = r \cdot t^2 \cdot N$$



Así pues, en $t$ años el aumento de la población es dado por

$$P_t = N(1 + kt - rt^2).$$

Seguidamente, se pide a los estudiantes que hallen el valor de P correspondiente a los primeros 11 años, teniendo en cuenta que $k = 0,024$, $r = 0,012$ y la población inicial = 1.000.

En primer lugar, escriben la fórmula

$$P = 1.000(1 + 0,024t - 0,012t^2)$$

sustituyen $t$, hacen una tabla de valores y a partir de ella, dibujan la gráfica, figura 10.

Tanto la tabla como la gráfica muestran que la población se extingue en un lapso un poco mayor de diez años. Esta clase de matemáticas puede servir de trabajo preliminar para la enseñanza de la biología o de práctica matemática, pero difícilmente conduce a entender biología o matemáticas aplicadas.

---

* M. Legay, "The Different Levels of Intervention of Mathematics in Biology", Bulletin de l'Association de Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Publique, Vol. 45, N° 251, Enero-Febrero, 1966.

Tabla

| $t$ | P(en miles) |
|---|---|
| 0 | 1.000 |
| 1 | 1.012 |
| 2 | 1.000 |
| 3 | 0,964 |
| 4 | 0.904 |
| 5 | 0.820 |
| 6 | 0.732 |
| 7 | 0.580 |
| 8 | 0.424 |
| 9 | 0.244 |
| 10 | 0.040 |
| 11 | -0.188 |

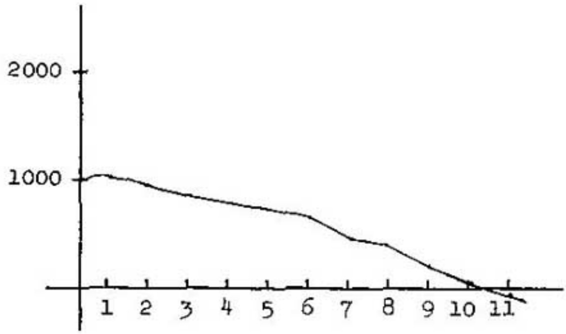



Fig. 10



**Nivel descriptivo.** Esta es la etapa en que los conceptos y el lenguaje matemáticos se aplican a la descripción de fenómenos científicos. Por ejemplo, véase qué sucede a un cuerpo que cae por efecto de la fuerza de la gravedad. En primer lugar, se hace un experimento consistente en soltar una bola pesada desde la parte superior de una plancha o tablón escalonado y, mediante fotografías sacadas a gran velocidad, se mide la distancia que la bola recorre en sucesivos e iguales intervalos de tiempo (o la distancia total, en un número dado de intervalos), y se registra los datos. A partir de éstos se busca describir el movimiento de la bola por efecto de la acción de la gravedad.

En la tabla, que figura en la página siguiente, se dan las dos columnas primeras; las demás se obtienen en la búsqueda de una explicación. Es evidente que la bola gana velocidad (como se puede ver en las columnas 2 y 4). En cada intervalo la velocidad aumenta, y la columna $\Delta V$ muestra que dicho aumento es lineal. Por lo tanto $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ es una constante llamada aceleración. Las tres últimas columnas permiten escribir

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a \quad \text{y} \quad \frac{V_1}{t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se puede entonces escribir

$$v = at$$

lo que se representa gráficamente en la figura 11. Si en esta figura se desea hallar la distancia total que la bola recorre, $s_1$, o cae en un tiempo dado, $t_1$, se utiliza la velocidad media. Puesto que la velocidad inicial es cero, dicha media es $\frac{0 + V_1}{2} = \frac{v_1}{2}$. Por lo tanto, la distancia recorrida está representada por el área situada debajo de la recta o gráfica de la velocidad, o sea

Tabla

**Intervalo de Tiempo y Distancia Recorrida por Una Bola que se Deja Caer desde Una Posición de Reposo**

| $t$ (sec) | 2 (cm) | $\Delta t$ | $\Delta s$ | $\frac{\Delta s}{\Delta t} = V_1$ | $\Delta V$ | $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| $\frac{1}{15}$ | 2,2 | $\frac{1}{15}$ | 2,2 | 33 | 65 | - |
| $\frac{2}{15}$ | 8,7 | $\frac{1}{15}$ | 6,5 | 98 | 65 | 975 |
| $\frac{3}{15}$ | 19,5 | $\frac{1}{15}$ | 10,8 | 163 | 65 | 975 |
| $\frac{4}{15}$ | 34,7 | $\frac{1}{15}$ | 15,2 | 228 | 65 | 975 |
| $\frac{5}{15}$ | 54,2 | $\frac{1}{15}$ | 19,5 | 293 | 65 | 975 |

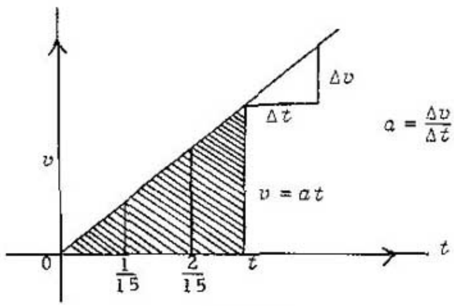



Fig. 11

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$s_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1 \quad \text{o} \quad s_1 = \frac{1}{2} t_1 \cdot a t_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$$

De este modo se llega a una descripción matemática completa del movimiento uniformemente acelerado.

Para una descripción más completa, en el caso que la velocidad inicial $v_0 \neq 0$, se puede utilizar la figura 12.

Aceleración = pendiente de BC o

$$a = \frac{v - v_0}{t} \qquad [1]$$

De esta ecuación obtenemos

$$v = v_0 + at \qquad [2]$$

El área bajo la línea es la distancia recorrida; luego

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \qquad [3]$$

o

$$s = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad [4]$$

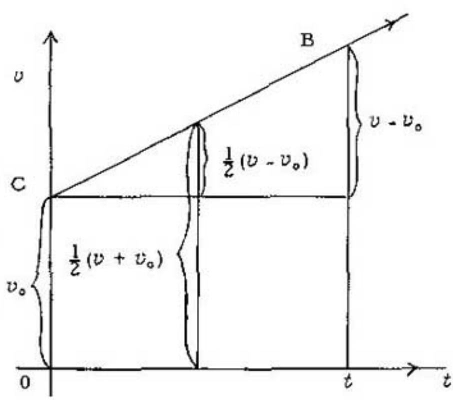



Fig. 12

Finalmente, eliminando $t$, se obtiene

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \text{o} \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s} \qquad [5]$$

Estas cinco ecuaciones, relacionadas con la pendiente, las coordenadas rectangulares, abscisa, ordenada, área y operaciones binarias son suficientes para describir el movimiento uniformemente acelerado de los objetos. Si se tratase de una aceleración no lineal, sería necesario recurrir al cálculo diferencial e integral.

**Nivel explicativo.** Este nivel implica, no sólo la descripción, sino una explicación matemática de un fenómeno. Como ilustración, escogemos una *teoría matemática de lucha por la vida*, como la propuesta por Volterra después de la Segunda Guerra Mundial. Consiste en una explicación destinada a los pescadores italianos de porqué, pese al hecho de haber cesado la pesca durante cuatro años (1941-45), había al término de dicho período mucho menos peces de ciertas especies que en el momento mismo en que ésta se suspendió. Por medio de tablas elaboradas con datos escogidos, diseñando teorías matemáticas para explicar dichas tablas y ensayando fórmulas, se obtiene una explicación biológica plausible de dicha escasez. Los pasos de este desarrollo son:

(1) Se hace un estudio del aumento sin control de una población de una cierta especie a partir de una tabla de la tasa de crecimiento de la población



Tabla

| $t$ en años | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | --- | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| población | $f(0)$ | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | $f(4)$ | | $f(t)$ |
| $\Delta f(t)$ | | $\Delta f(0)$ | $\Delta f(1)$ | $\Delta f(2)$ | $\Delta f(3)$ | --- | $\Delta f(t-1)$ |

Se advierte que $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$ es constante, y por tanto la fórmula de la tasa de crecimiento es exponencial; es decir,

$$f(t) = (1 + r)^t f(0) \qquad (\text{o } N = N_0 k^t)$$

donde $r$ es la tasa o índice de crecimiento anual de la población. Esta tasa explica los factores de natalidad y mortalidad.

(2) Dado que según (1) la población aumenta indefinidamente, lo contrario de lo que realmente sucede en la vida, se rectifica la teoría mediante un factor de corrección dependiente de la tasa a que dicha población consume su provisión de alimentos. Se supone que el factor de corrección es proporcional a la población en un instante dado; es decir,

$$r = R - Cf(t)$$

donde R es la tasa del exceso de nacimientos sobre el de defunciones y $Cf(t)$ es un factor de corrección lineal. Así, mediante ejemplos de datos estadísticos se lleva al estudiante a escribir la fórmula

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h\cdot f(t)} = \mathrm{R} - \mathrm{C}f(t)$$

que permite predecir el número de individuos de una población $h$ períodos después de cualquier período dado $t$. El análisis de esta función muestra cómo se puede extinguir una población.

(3) El paso final consiste en evaluar los resultados en el caso de una población depredadora de otra. En tal caso, hay dos poblaciones de distinta especie $x$ e $y$, y sus respectivas tasas de crecimiento vienen dadas por

$$r_x = \frac{f(t+h)-f(t)}{h\cdot f(t)}; \qquad r_y = \frac{g(t+h)-g(t)}{h\cdot g(t)}$$

Se sobrentiende que la especie $y$ utiliza a la $x$ como parte de su provisión alimenticia. En cada caso se admite una tasa de nacimientos superior a la de mortalidad, que se representan por $a$ y A, respectivamente. También se toma una corrección de la población, proporcional a la población existente en un momento cualquiera. La corrección de la especie $x$ es $-bx$, y la de la especie $y$ es $+\mathrm{B}x$, puesto que, cuanto más alimento haya disponible para la especie $y$, mayor será su aumento. Finalmente, se supone un factor $-cy$ para la especie $x$, porque cuantos más individuos tenga la especie $y$, más devorarán a los de la especie $x$. También se postula un factor $-\mathrm{C}y$ respecto de la especie $y$, ya que sus individuos se extinguen en número proporcional a su población. De este modo, se obtiene dos fórmulas como expresión de la tasa de crecimiento, es decir

$$r_x = a - bx - cy$$

$$r_y = \mathrm{A} + \mathrm{B}x - \mathrm{C}y$$

A partir de muestras estadísticas de las dos poblaciones, se pueden establecer ecuaciones distintas sobre cada una, así como los datos utilizados para determinar los valores de $a$, $b$, $c$, A, B y C en un intervalo dado de tiempo $h$. Estas ecuaciones *bastan* para explicar porqué, al extinguirse la especie $x$, también la especie $y$ puede declinar y extinguirse. También explica la necesidad de una provisión de alimentos controlada para la subsistencia de la especie. De este modo, las matemáticas brindan la explicación de un fenómeno biológico. Al comienzo, la determinación de los parámetros $a$, $b$, $c$, A, B y C puede ser apenas aproximada, pero a medida que el estudio experimental prosigue, se los puede obtener con bastante exactitud.

Nivel de Organización o de Modelo. Este es el nivel más alto de la aplicación matemática y requiere por lo general un vasto acopio de conocimiento de la materia. Adelantos recientes en investigación operacional, en toma de decisiones, en eficacia óptima, en programación lineal y en el perfeccionamiento de la computación digital, han abierto un amplio horizonte de aplicaciones matemáticas. En la bibliografía se mencionan fuentes de información sobre estas nuevas aplicaciones. Aquí se cita un modelo muy elemental, elaborado en los Laboratorios de la Bell Telephone.

Se desea representar los números enteros del 0 al 7 mediante tres dispositivos de dos estados, por ejemplo, tres lámparas que pueden estar encendidas o apagadas. Designamos apagadas con 0 y encendidas con 1. En la siguiente tabla se muestra un ejemplo de la aplicación del sistema binario.

Tabla

| N° | Lámparas A | B | C |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |

Sin embargo, no podemos utilizar *este* sistema para contar en un dispositivo dual. Es fácil pasar de 0 a 1 encendiendo la lámpara C, pero no se puede pasar a 2 sin antes volver a 0, o saltar a 3.



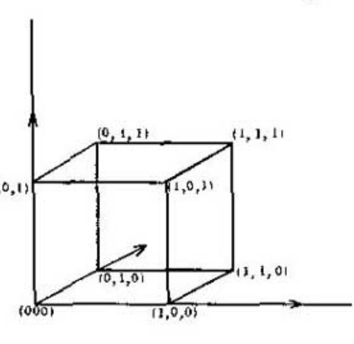
| Cuenta | A | | | Cuenta | A | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 |

Lo que se necesita es, por supuesto, una manera de ordenar ocho ternas de ceros y unos de modo que, al pasar de la terna asignada a $n$ a la asignada a $n+1$, sólo cambie una posición en la terna. ¿Cómo conseguirlo?

Un terna $(x, y, z)$ sugiere un punto en el espacio de tres dimensiones, y las coordenadas en que sólo intervienen 0 y 1 sugieren los vértices del cubo del primer octante (Fig. 13).

Ahora tenemos un modelo matemático de nuestro problema. Al pasar de un vértice a otro adyacente, sólo cambia una coordenada. Partiendo de cualquier vértice, ¿podemos trazar una trayectoria cerrada de aristas que pase una, y sólo una,

Fig. 13



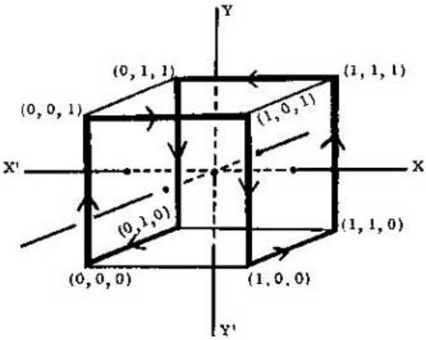



Fig. 14. Línea hamiltoniana.

vez por cada vértice? La respuesta es afirmativa: dicha ruta es una *línea hamiltoniana*. Esto se muestra en la figura 14, y la tabla que sigue indica cómo se puede establecer la correspondencia con los números de 0 a 7.

De esta manera se halló una serie de tres dispositivos duales que nos permite contar de 0 a 7.

¿Hay una serie distinta de la anterior? Esto depende del significado atribuido a la palabra *distinta*. Si se parte de un vértice diferente (como en la Cuenta II), *no* se obtiene una trayectoria distinta porque podemos transformar la trayectoria representada en la figura 14 en sí misma haciendo girar el cubo en torno a YY'. Incluso si intercambiamos la columna de lámparas B y la de lámparas C, podemos obtener la misma correspondencia mediante operaciones simétricas en un cubo. En efecto, el intercambio de las columnas A, B y C, o bien el de 0 con 1, son exactamente las simetrías de un cubo. Por tanto, sólo hay una línea hamiltoniana en un cubo de tres dimensiones. Es de esta manera como una línea hamiltoniana sobre un cubo da un modelo matemático o una organización del dispositivo eléctrico enciende-apaga de contar.



Tabla

| Cuenta I | A | B | C | Cuenta II |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 3 |

Supóngase que se amplía el problema hasta contar 15 por medio de cuatro lámparas. Por analogía, la solución debiera ser las coordenadas de un cubo en un espacio de cuatro dimensiones. Dicho cubo se llama "tesseract" y se puede mostrar por medio de varios modelos. Tal vez el más sencillo sea el de dos cubos, externos entre sí y con los vértices correspondientes unidos por 8 nuevas aristas. (Véase la figura 15.)

Para resolver el problema, empiécese por dibujar una línea hamiltoniana sobre cada cubo. A continuación elimínense dos aristas

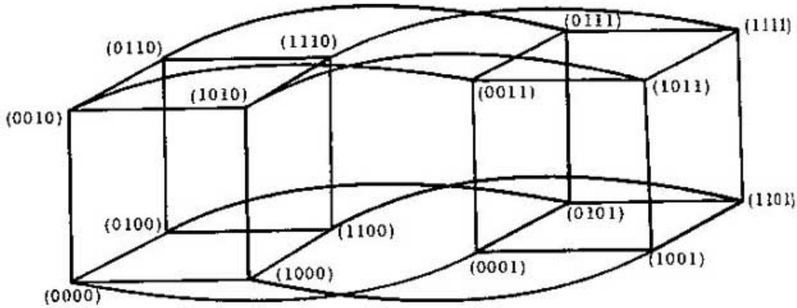



Fig. 15. Tesseract

correspondientes, una en cada cubo, y póngase en su lugar los eslabones de conexión (aristas) del "tesseract". La trayectoria cerrada resultante es una línea hamiltoniana sobre el "tesseract". La figura 16 muestra una solución del problema de contar del 0 al 15 por medio de cuatro lámparas de dos posiciones. Esta trayectoria se llama "compuesta" por el hecho de haberse obtenido con dos líneas hamiltonianas en cada cubo, con dos aristas correspondientes eliminadas y ligadas por nuevas aristas del "tesseract".



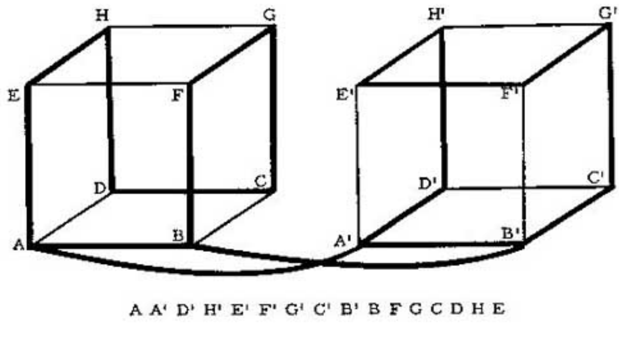



Fig. 16.

Se ha demostrado que hay 9 trayectorias hamiltonianas sobre el "tesseract", 8 de las cuales son compuestas. La ruta novena utiliza 4 nuevas aristas del "tesseract" y por ello no está compuesta de líneas hamiltonianas sobre un cubo. Hay 9 sucesiones distintas de cuádruples que pueden ser utilizados para contar de 0 a 15 por cuatro lámparas de dos posiciones.

¿De cuántas maneras una sucesión de cinco lámparas de dos posiciones puede contar de 0 a 31? ¿Se puede recurrir a la analogía de un cubo de cinco dimensiones? Tal vez sí, pero el problema estaba aún por resolver en agosto de 1970. Es cosa bastante fácil hallar una sucesión, pero se desconoce el número de ellas. Nos hallamos en el umbral de la investigación matemática.

Estos son, pues, ejemplos de planos de aplicación de las matemáticas al estudio de otras disciplinas, aplicación cada día de mayor alcance en todas las esferas de conocimiento. Y esta aplicación va más allá de las meras aritmética, álgebra y geometría. Las contribuciones más importantes de las probabilidades, de la lógica y del análisis se hacen sentir en la creación de nuevos métodos dentro de la misma disciplina.

## PROBABILIDADES

Los adelantos de la tecnología en los últimos 100 años han tenido un gran efecto en todas las materias enseñadas en la escuela secundaria. En algunos casos, estos adelantos han generado la puesta al día de materias ya existentes en el plan de estudios; en otros casos han sido la causa de la inclusión en dicho plan de materias que no se habían enseñado nunca en tales escuelas. La teoría de probabilidades pertenece a esta segunda categoría.

Hoy, un ciudadano cualquiera necesita entender el vocabulario y los conceptos de esta disciplina a fin de poder interpretar correctamente la clase de información que, con creciente frecuencia, se difunde en nuestra sociedad. En esta sección se indicará de qué manera lo relativo a la probabilidad se puede enseñar en las escuelas secundarias, y cómo dicho estudio se presta a ciertas aplicaciones significativas.

Se dice que la teoría de probabilidades, en cuanto rama de las ciencias exactas, nació en el año 1654, fecha en que dos matemáticos franceses, Blaisé Pascal y Pierre Fermat iniciaron correspondencia acerca de ciertos problemas relativos a juegos de azar. Desde entonces, muchos matemáticos han añadido su grano de arena al acervo de la teoría de las probabilidades, entre ellos Christian Huggens, Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre y Pierre Simon de Laplace. Sin embargo, esta teoría careció de una fundamentación matemática sólida hasta 1933, cuando el matemático ruso A.N. Kolmogorov demostró que tales fundamentos podían apoyarse en la teoría de los conjuntos. El interés por este asunto es grande, porque la teoría de las probabilidades es de importancia fundamental en campos como el de la estadística, teoría de la fiabilidad, investigación operacional, teoría de la comunicación, control de calidad, genética y, en general, dondequiera que intervenga el análisis de datos. En la Conferencia Internacional sobre Enseñanza de las Probabilidades y Estadística de nivel preuniversitario, celebrada en marzo de 1969* se hizo cierto número de recomendaciones acerca de la ordenación de temas de esta índole adaptados a las escuelas secundarias. Para responder a la pregunta "¿Qué se debe enseñar?", Alfred Renyi presentó una lista que abarca cuatro puntos:



1. Antecedentes empíricos de la teoría de probabilidades, es decir, ejemplos de regularidades estadísticas en la vida corriente, en la naturaleza, en juegos de azar, etc.;

---

* Las actas de esta conferencia las publicó Wiley & Sons, en EE. UU., así como en Suecia, con el título *The Teaching of Probability and Statistics*, editor Lennart Rade.

2. Teoría matemática de probabilidades;

3. Aplicaciones de la teoría de probabilidades a la descripción y predicción de fenómenos aleatorios en distintos campos.

4. La historia de la teoría de probabilidades, incluso la discusión de las implicaciones filosóficas del concepto de probabilidad.

Declara, además, que estos cuatro puntos corresponden al orden en que la materia debe ser enseñada. También afirma:

"Deseo insistir en que, cuando digo que el estudio debe empezar por la familiarización de los estudiantes con la noción de regularidad estadística, no quiero decir que se deba empezar por la estadística ..., sino que dicha noción ha de explicarse mediante ejemplos bien escogidos y experimentos que aclaren a los alumnos los hechos básicos que la teoría matemática de las probabilidades debe enseñar a entender y explicar; pero, tras esto, se pasará a exponer tanto como sea posible de la teoría de probabilidades teniendo en cuenta la edad y la preparación matemática previa de los estudiantes ...".

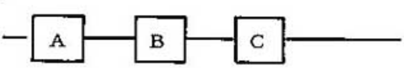
Así, pues, el objeto de esta sección es ilustrar algunas de las aplicaciones de las probabilidades enseñadas en las escuelas secundarias. Claro está, que para discutir estas aplicaciones, los estudiantes deben tener cierto conocimiento de la teoría de probabilidades. De aquí, la razón de las observaciones de Renyi. Una vez más, al igual que en álgebra y geometría, a fin de llegar a una ordenación de temas de enseñanza basada en los antedichos fines, el plan de esta materia debe abarcar del grado séptimo al duodécimo. En el capítuló 5 se citan algunos proyectos de plan de estudios donde se viene haciendo esto. Además, las personas interesadas deben consultar las actas de la conferencia sobre la enseñanza de las probabilidades, donde hallarán otras sugerencias.



**Ilustración 1. Fiabilidad del Sistema**

En la tecnología de hoy es importante en extremo la determinación del grado de fiabilidad inherente a sistemas complejos. Resulta que el hallar la probabilidad de que un sistema total funcione como es debido depende de conceptos probabilísticos elementales. Si se denota por $P_a$ la probabilidad de que la componente "A" funcione bien, entonces la probabilidad de que el sistema representado en la figura 17 haga lo mismo, es $P_a \cdot P_b \cdot P_c$. Esta probabilidad es lo que se llama fiabilidad del sistema representado.

Sistema 1

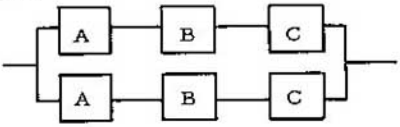



$R_1 = P_a \cdot P_b \cdot P_c$

Fig. 17

Lo que realmente importa es ¿Cómo acrecentar el grado de fiabilidad del sistema? El análisis de los sistemas representados en las figuras 18 y 19, sugieren la respuesta.

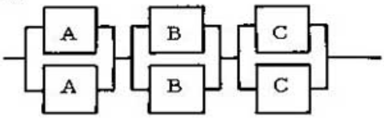
Sistema 2



$$R_2 = 1 - (1 - R_1)^2$$

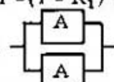
Fig. 18

Sistema 3



$$R_3 = (1-(1-P_a)^2)(1-(1-P_b)^2)(1-(1-P_c)^2)$$

Fig. 19

Para calcular la fiabilidad del sistema 2, nótese que sólo dejará de funcionar si fallan los dos sistemas de tipo 1 que le componen. La probabilidad de que esto ocurra es $(1 - R_1)^2$; por lo tanto, $R_2 = 1 - (1 - R_1)^2$. Para calcular $R_3$, nótese que la fiabilidad correspondiente a  es $(1 - (1 - P_a)^2)$ lo que implica que la fiabilidad del sistema será la dada. Todavía se necesita demostrar que, de hecho, se ha acrecentado la fiabilidad del sistema 1 mediante la consideración de redundancia de sistema (sistema 2) y de redundancia de componentes (sistema 3). Para ver que 2 representa una mejora sobre 1, adviértase que siempre que el sistema 1 funcione bien, también funcionará bien el sistema 2, lo que otorga a éste una fiabilidad por lo menos igual a la del 1. Comparando el 2 con el 3, se nota que cualquiera que sea la manera que haga funcionar correctamente el sistema 2, también satisfará al sistema 3, y que hay otras maneras de que el sistema 3 funcione correctamente. Así pues, también el sistema 3 es por lo menos tan seguro como el 2. A modo de ejemplo, supongamos que se ha determinado que la fiabilidad de los componentes A, B y C son 0,9, 0,9 y 0,7, respectivamente. En tal caso la fiabilidad de los sistemas 1, 2 y 3 son:

$$\text{Sistema 1} = (0,9)(0,9)(0,7) = 0,567$$

$$\text{Sistema 2} = 1 - (1 - 0,567)^2 = 1 - (0,433)^2 \approx 0,813$$

$$\text{Sistema 3} = (0,99)(0,99)(0,91) \approx 0,892$$

Prosiguiendo el análisis, se verá que se pueden hacer mejoras adicionales mediante el aumento de redundancia de componentes o de sistemas, o de ambas maneras a la vez. En efecto, parece que la fiabilidad de cualquier sistema puede acercarse a 1 simplemente mediante la adición de suficientes mejoras del tipo indicado. Sin embargo, esta conclusión no es cierta. Una investigación de este hecho lleva a una aplicación auténtica de la teoría de probabilidades a la tecnología.

**Ilustración 2. Valor Esperado**

Si se representan por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los resultados de un cierto experimento y sus respectivas probabilidades de ocurrencia, por $p_1, p_2, \ldots, p_n$, el valor esperado, E, del experimento viene definido por

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Esta definición puede aplicarse en el análisis de juegos, de loterías y problemas análogos.

a. Se lanza al azar una moneda hasta que sale cara o hasta que sale cruz tres veces consecutivas. El número de veces que se espera sea necesario arrojar la moneda se puede calcular mediante la tabla siguiente, en que se hallan resultados y probabilidades.

Tabla

| Número de lances | 1 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|
| Probabilidad | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Ocurre un lance si el resultado es cara. Ocurren dos lances si sale cruz y, a continuación, cara. Ocurren tres lances si salen tres cruces, o bien dos cruces y, a continuación, una cara.

$$E = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}$$



b. Se venden 2.000 billetes de lotería a razón de 2 dólares cada uno. Los premios son uno de 800 dólares, cuatro de 200 dólares cada uno, y finalmente, diez premios de 20 dólares cada uno.

La ganancia esperada de un billete viene dada por

$$800\left(\frac{1}{2.000}\right) + 200\left(\frac{4}{2.000}\right) + 20\left(\frac{10}{2.000}\right) = 0,90$$

Dado que el billete cuesta 2 dólares, el valor esperado del billete es $0,90 - 2 = -1,10$, desfavorable al comprador.

c. Hállese el número esperado de varones en una familia de un matrimonio que desea tener seis hijos en total.

Tabla

| Número de varones | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidad | $\frac{1}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{20}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

$$E = 0\left(\frac{1}{64}\right) + 1\left(\frac{6}{64}\right) + 2\left(\frac{15}{64}\right) + 3\left(\frac{20}{64}\right) + 4\left(\frac{15}{64}\right) + 5\left(\frac{6}{64}\right) + 6\left(\frac{1}{64}\right) = 3$$

Nótese que la probabilidad de que ocurra el nacimiento de 3 varones es 5/16.

## Ilustración 3. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov ayudan a describir situaciones en las cuales hay una sucesión de experimentos donde

1. El resultado de cada experimento es un elemento de cierto conjunto finito, digamos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ y

2. El resultado de cualquier experimento depende, cuando más, del resultado del experimento inmediatamente anterior, y no de los demás. Por otra parte, a cada par de resultados $(x_i, x_j)$ está asociado un número $P_{ij}$ que es la probabilidad de que ocurra $a_j$ cuando $a_i$ es el resultado precedente. Resulta que estas probabilidades pueden ser ordenadas en una matriz que tiene algunas propiedades interesantes.

Por ejemplo, supóngase que un hombre tiene dificultades en llegar a tiempo al trabajo. Si llega a tiempo, al día siguiente hay una probabilidad del 40 por ciento de que llegue tarde. Pero si llega tarde un día, tiene el 90 por ciento de probabilidad de llegar a tiempo el siguiente día. El espacio de resultados (estados) de la sucesión es {tarde, no tarde}. La información nos dice que estamos tratando con una cadena de Markov, porque el resultado de un día cualquiera sólo depende del resultado del día precedente. La matriz de esta cadena es



$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \end{array} = T \qquad \text{Tómese} \quad \begin{array}{l} x_1 = \text{tarde} \\ x_2 = \text{no tarde} \end{array}$$

Y se llama la matriz de transición de la cadena. Obsérvese que el elemento $P_{21}$ da la probabilidad de que el hombre pase del estado $x_2$ (no tarde) al estado $x_1$ (tarde) en un día. En general, $P_{ij}$ expresa la probabilidad de pasar del estado $x_i$ al $x_j$ en 1 paso.

Supóngase que se quiere hallar la probabilidad de que el hombre pase de $x_1$ a $x_1$ en 3 días exactamente, o sea de llegar

tarde → no tarde → no tarde → tarde (de nuevo).

Se puede demostrar que sólo se necesita calcular $T^3$ y examinar $P_{11}$.

$$\begin{aligned} T^3 &= T^2 \cdot T \\ &= \begin{bmatrix} 0,37 & 0,63 \\ 0,28 & 0,72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,289 & 0,711 \\ 0,316 & 0,684 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de que si llega tarde un día, volverá a llegar tarde de nuevo tres días más tarde (y no llegará tarde antes de los tres días) es 0,289.

Este tipo de matrices de transición tiene otras propiedades interesantes. Una de ellas es que, si la matriz de transición se denota por T, entonces al aumentar $n$, $T^n$ se aproxima a alguna matriz fija, digamos L. Una interpretación de esto es que L nos da la probabilidad de que acontezca un estado particular $x_j$, a largo plazo, en un experimento determinado. Lo notable del caso será, sin embargo, que las filas de la matriz L serán idénticas. La conclusión es: la probabilidad de que $x_j$ ocurra a largo plazo en un experimento determinado es *independiente* del estado inicial. Para observarlo, adviértase que, para nuestra matriz T, correspondiente a los estados *tarde, no tarde,*

$$T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0,37 & 0,63 \\ 0,28 & 0,72 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0,289 & 0,711 \\ 0,316 & 0,684 \end{bmatrix}$$

$$T^4 = \begin{bmatrix} 0,313 & 0,687 \\ 0,305 & 0,695 \end{bmatrix}$$



y cuando $n$ crece indefinidamente,

$$T^n \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}$$

Otro hecho notable relacionado con este tipo de matriz de transición es que las filas de la matriz límite, L, se pueden determinar de antemano. El proceso implica el hallar un vector de probabilidades que permanezca fijo respecto a T; esto es, un vector de la forma $(p,\ 1-p)$, tal que

$$(p,\ 1-p)T = (p,\ 1-p).$$

En este ejemplo, $p = \frac{4}{13}$ y $1 - p = \frac{9}{13}$.

Damos ahora otro ejemplo, relacionado con el pronóstico del tiempo. Se ha observado que el tiempo en Tel-Aviv se comporta de esta manera: Si es seco hoy, la probabilidad de que sea también seco mañana es 75%; pero si un día no es seco, la probabilidad de que lo sea al día siguiente sólo es 33,3%. La matriz de transición de los estados (del tiempo) $x_1$ = seco, $x_2$ = no seco es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Puesto que el vector de probabilidades $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$ es tal que

$$\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right),$$

resulta que la probabilidad a largo plazo en favor de tiempo seco es $\frac{4}{7}$ y de tiempo no seco, $\frac{3}{7}$.

Los ejemplos anteriores muestran que el estudio de la teoría de probabilidades ofrece una oportunidad a los estudiantes de entrar en contacto con algunas aplicaciones auténticas de las matemáticas. Todas las reformas del plan de estudios de las matemáticas de segunda enseñanza deben aprovechar dicha oportunidad.

## LA COMPUTADORA ELECTRÓNICA Y LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Uno de los adelantos más sorprendentes y potencialmente de mayor alcance tecnológico durante el último cuarto de siglo es la invención y amplia difusión de las computadoras digitales. La primera computadora comercial apta para regirse de acuerdo con un programa almacenado en su propia memoria, fue la Eckert-Mauchly UNIVAC, puesta a la venta en 1950. Hoy hay miles de estas computadoras, cuyo diseño, capacidad y rapidez de operación han sido perfeccionados en alto grado. Las más recientes operan a una velocidad que pone a prueba nuestra imaginación. Moviéndose a la velocidad de la luz, una pulsación recorre un cable de 30,4 cm en una milmillonésima de segundo. El costo de la velocidad es esencial cuando se tiene en cuenta que el hacer un millón de operaciones o cálculos solía costar 30.000 dólares. Gracias a las computadoras modernas es posible hacer un millón de cálculos por sólo 0,30 dólares. En el futuro el costo será menor todavía.



Sería superfluo afirmar que las computadoras electrónicas han ejercido profunda influencia en la industria, la ciencia y la ingeniería. Intrincados procedimientos de cálculo que antes sólo se habían empleado rara vez o en casos muy sencillos pueden ahora aplicarse con mucha mayor frecuencia. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales que sirven de fundamento al pronóstico del tiempo y sus métodos de resolución eran conocidas desde hace mucho, pero el tiempo y la paciencia requeridos para esta tarea mental hicieron poco menos que inútiles dichas ecuaciones, por cuanto para predecir el estado del tiempo durante uno o dos días se requieren millones de cálculos aritméticos. Antes de contar con computadoras, esto hubiera ocupado un mes o más a varios expertos que sólo dispusieran de máquinas manuales de calcular. En cambio hoy esta tarea puede llevarse a cabo en unos cuantos minutos, gracias a lo cual un vasto acervo de saber científico pasó de la fase teórica a la fase aplicada. En gran medida, la ampliación del pronóstico del tiempo hasta abarcar períodos más largos --por ejemplo de una semana-- dependerá de la invención de equipo de cálculo más complejo y más rápido. Otro ejemplo nos lo ofrece la aplicación de los rayos X al estudio de la cristalografía de moléculas orgánicas complejas, tales como las de la hemoglobina. También aquí las matemáticas y la física se combinaron en el método de análisis de diagramas de difracción, creados al atravesar rayos X por un cristal, lo cual permitió determinar la estructura del cristal en la década 1920-29, y de aplicar este método a moléculas de estructura simple. En fecha reciente el uso de las computadoras electrónicas ha permitido realizar los millones de operaciones que esta técnica exige y como consecuencia ha sido posible ampliar su aplicación a determinaciones más complejas.

Además de haber hecho posible la ampliación de la esfera de aplicaciones de las matemáticas, la computadora ha ejercido gran influencia en la creación de varias formas, enteramente nuevas, de aplicación de las matemáticas. Una de las más importantes de estas recientes aplicaciones se denomina *programación lineal*.

Si bien ciertos tipos de problemas de programación lineal han sido formulados con anterioridad, y en ciertos casos fueron resueltos, la primera formulación matemática general del problema de la programación lineal, y el primer método general de solución, se deben a George B. Dantzig, en 1947. La primera solución de un problema de programación lineal mediante computadoras electrónicas se consiguió en 1952,

y desde esta fecha tanto la teoría como la técnica de la programación lineal han ganado mucho terreno. Se reconoce ahora que la programación lineal se halla vinculada estrechamente con otros sectores matemáticos, tales como la teoría de los juegos.

De la misma manera que la teoría y formulación general de la programación lineal fueron precedidas por el estudio de cierto número de problemas específicos con características comunes, la naturaleza de la programación lineal se puede entender mejor mediante el examen de uno o dos problemas sencillos. El primero de ellos se refiere a la manufactura de dos artículos, y se puede resolver gráficamente.

Supóngase que una compañía muy modesta desea fabricar y vender dos artículos: mesas y pupitres. El gerente quiere que los beneficios diarios de la empresa sean máximos, pero el número de artículos que puede fabricar está restringido por la disponibilidad de materiales, de mano de obra y por el número de mesas y pupitres que puede vender. En la manufactura de los artículos se emplea madera de dos clases. Para cada pupitre se necesita una unidad de madera de la primera clase y tres unidades de madera de la segunda; y cada mesa requiere cuatro unidades de la primera y dos de la segunda. El total de unidades de madera de que el fabricante dispone diariamente es la suma de 36 del primer tipo y 29 del segundo. Para fabricar cada mesa se necesitan tres horas de trabajo de un obrero, y para fabricar cada pupitre se necesitan cuatro horas, y el total de horas diarias de trabajo con que el fabricante cuenta es 40. El gerente sabe que no puede vender por día más de 9 pupitres y más de 10 mesas, de modo que la producción no puede exceder dichas cifras. Si su ganancia es una unidad por cada pupitre y dos unidades por cada mesa, ¿cuántos pupitres y cuantas mesas debe hacer por día, a fin de que sus beneficios sean máximos?

Empiécese por llamar $x$ al número de pupitres por hacer e $y$ al de mesas. Dado que la madera empleada de la primera clase no puede exceder 36 piezas o unidades y cada pupitre requiere una y cada mesa cuatro, se tiene la primera desigualdad $x + 4y \le 36$ unidades. Teniéndose en cuenta la disponibilidad de madera de la segunda clase y que entran en cada pupitre tres unidades y en cada mesa dos, se llega a la desigualdad $3x + 2y \le 29$. Del mismo modo, considerando las horas de trabajo requeridas y las disponibles, se llega a $3y + 4x \le 40$. Finalmente, las posibilidades de venta imponen $x \le 9$ e $y \le 10$. Para que sea matemáticamente completo, se debe agregar los requerimientos $x \ge 0$ e $y \ge 0$. Ahora bajo estas restricciones impuestas a $x$ e $y$, el beneficio máximo $p$ viene expresado por la fórmula $p = x + 2y$.

Escuetamente formulado, el problema consiste en:

Hállese el máximo de $x + 2y$,

con la condición de que:

(1) $x \ge 0, \quad y \ge 0$

(2) $x + 47 \le 36$

(3) $3x + 2y \le 29$

(4) $3y + 4x \le 40$

(5) $x \le 9$

(6) $y \le 10$

Cada una de estas siete desigualdades representa un semiplano del plano correspondiente determinado por los ejes cartesianos $x, y$. Por ejemplo, la desigualdad $x + 4y \le 36$ representa el semiplano situado debajo de la recta $x + 4y = 36$ (Fig. 20 (a). Todo punto $(x, y)$ que satisfaga las siete desigualdades anteriores yace en el semiplano definido por cada una de las siete desigualdades, y en consecuencia pertenece a la intersección de todos ellos. Así pues, el conjunto de puntos del plano $x$ - $y$ determinado por las siete desigualdades o *restricciones* del problema es una región poligonal de dicho plano. La intersección de estas siete regiones es la parte rayada diagonalmente de la figura 20 (b). Obsérvese que una de las siete condiciones, la $y \le 10$, es redundante.

Un punto de la región poligonal así determinada se llama una solución factible del problema. Por satisfacer todas las restricciones del problema, es un candidato que merece ser tenido en cuenta para ver si satisface la condición final, que es convertir en un máximo la ganancia expresado por la función $p = x + 2y$. El problema queda planteado ahora en estos términos: ¿Qué punto de todos los que constituyen la región de los factibles da un valor máximo de $p$?

Supóngase que se ha asignado a $p$ un cierto valor, por ejemplo, 10. En tal caso, la función de ganancia se convierte en $10 = x + 2y$, y su re-

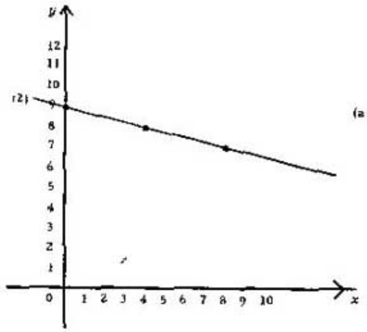



Fig. 20(a)

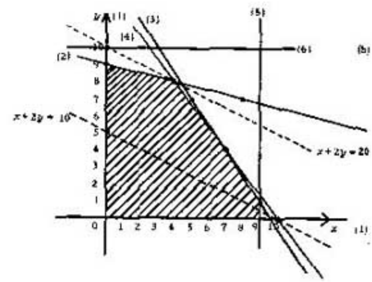



Fig. 20(b)

presentación gráfica es la recta dibujada con trazos y puntos de la figura 20 (b). De la misma manera, si se asignan a $p$ sucesivamente los valores 6, 15 y 25, se obtiene otras rectas, todas ellas paralelas. De hecho, si $p$ toma todos los valores reales posibles, se obtienen como gráficas de la función una familia de rectas paralelas. La línea de esta familia que tiene un punto, y uno sólo, perteneciente a la región de los puntos factibles y todos los demás fuera de ella es, evidentemente, la línea de puntos en la figura (b). Esta línea corta claramente al polígono factible en uno de sus vértices. Basándonos en la gráfica, (tal vez más de lo debido) este vértice parece ser el determinado por la intersección de las líneas rectas $x + 4y = 36$ y $3y + 4x = 40$. Resolviendo este sistema, hallamos $x = 4$, $y = 8$. Un poco más de experimentación con otros puntos reforzarán el parecer de que ésta debe ser la solución que hace máximo el valor de $p$ en la ecuación $p = x + 2y$. Así pues, $p = 4 + 16 = 20$. El fabricante debe hacer 4 pupitres y 8 mesas, y el beneficio será de 20 unidades.

Para resolver el problema fue necesario fiarse en cierta medida de la intuición. No obstante, ésta nos da una idea bastante aproximada de lo que sucede en la resolución de un problema general de programación lineal. El rasgo esencial de este problema, y el que hizo posible una solución sencilla, es que contiene sólo dos incógnitas, lo que permite trazar todas las gráficas en un mismo plano. Si contuviera $n$ incógnitas, las gráficas tendrían que trazarse en un espacio de $n$ dimensiones, y cada desigualdad representaría un semiespacio limitado por un hiperplano de $n - 1$ dimensiones. En consecuencia, la región de factibilidad sería un poliedro convexo en el espacio $n$-dimensional. Por ejemplo, en el caso de tres incógnitas, la región de soluciones factibles o posibles sería un poliedro convexo de caras planas.

La función cuyo máximo se trata de obtener en el problema general, tiene la forma $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Nótese que es una función lineal (de primer grado) en cada variable. Y esta es una característica general de los problemas de programación lineal. Si esta función lineal (que se suele denominar función objetiva) asume un valor particular, representará un hiperplano en el espacio $n$- dimensional. Así pues, $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ puede considerarse como la expresión analítica de una familia de hiperplanos paralelos en el espacio de $n$ dimensiones. El problema entonces consiste en hallar el plano de máximo valor que corta el poliedro convexo de la región de factibilidad en por lo menos un punto. En el ejemplo bidimensional que hemos propuesto, la familia dada por la función objetiva estaba representada por la familia de rectas paralelas $p = x + 2y$. La única de éstas con un máximo P y que corta la región de soluciones factibles, resultó ser la recta $x + 2y = 20$. Tocó al polígono convexo de soluciones factibles en un punto exactamente: en un vértice del polígono. Esto es cierto también en el problema general: el hiperplano $k = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ donde $k$ corresponde al hiperplano de valor máximo que intersecta el poliedro convexo de soluciones factibles en un vértice (a menos que sea paralelo a una de las caras del tal poliedro, en cuyo caso la intersección puede ser una cara entera). Por lo tanto, una vez determinado el poliedro convexo de las soluciones factibles (es decir, aquellas que satisfacen las restricciones del problema), sólo es necesario sustituir las coordenadas de cada vértice en la función objetiva para ver cuál vértice la hace máxima. Sin embargo, ésta puede ser una tarea enorme. Si el problema tiene 30 desigualdades restrictivas (cosa nada excepcional) y 20 incógnitas, el poliedro convexo en el espacio de 20 dimensiones tendrá un máximo de $\binom{30}{20}$ vértices que poner a prueba.* Aun disponiendo de computadoras de gran velocidad, será necesario hallar algunos algoritmos que permitan la prueba de estos vértices de un modo sistemático. Algunos de estos algoritmos fueron diseñados ya; el de aplicación más frecuente se denomina el *método simplex*. Este permite elegir siempre un vértice para poner a prueba tal que haga el valor de la función objetiva mayor que el correspondiente al vértice anterior ya probado. Se puede demostrar que en el caso de 20 incógnitas y 30 desigualdades restrictivas, la solución se obtiene por lo general tras 40 pruebas cuando más --lo que supone una mejora considerable con respecto a la selección al azar de los vértices, que requeriría, por término medio, $\frac{1}{2} \cdot \binom{30}{20}$ pruebas.



Todo lo dicho arriba se basa en la admisión tácita de que los problemas de programación lineal se resuelven siempre hallando el máximo de una función lineal supeditada a un sistema de restricciones lineales. Pero de hecho puede ser necesario hallar el mínimo de ciertas funciones lineales. Por ejemplo, volviendo al problema del fabricante de muebles, supongamos que alguna función lineal expresase el *costo* en vez de la ganancia. En tales circunstancias el problema requeriría hallar el mínimo de esta función. Es un hecho notable de la programación lineal que por cada problema que implique hallar el máximo de una función lineal, hay otro equivalente que requiera hallar el mínimo de otra función lineal, y que cuando cierto algoritmo conduce a la solución de un problema, la solución de su correlativo se obtendrá automáticamente también. Dos problemas equivalentes se denominan *duales*. Cuando se trata de hallar algoritmos que faciliten la solución de estos problemas, basta pues tener en cuenta una sola de las dos alternativas: la que requiere el máximo o la que requiere el mínimo.

---

* Véase Apéndice I de la monografía N° 11, "Probabilidad e Inferencia Estadística", de esta serie de matemática.

Incluso con algoritmos como el del *método simplex,* la resolución de problemas complejos de programación lineal sería prácticamente imposible si no se dispusiera de computadoras electrónicas. En un problema de relativa sencillez, de 20 incógnitas y 40 desigualdades restrictivas, por ejemplo, cada prueba de un vértice tal vez requiriese una hora de cálculos aritméticos por parte de un experto en el manejo de calculadoras manuales. Por suerte, la programación previa inherente a la computadora digital es muy fácil. Y una vez hecha, una máquina computadora actual da la solución en menos de un minuto.

Para dar cierta idea de la variedad de problemas que pueden ser resueltos mediante la programación lineal, examinaremos aquí uno mínimo. El problema se formula en términos generales, y en cuanto a la solución, basta decir que, a fin de resolverlo, se necesita uno de los algoritmos, por ejemplo el *método simplex,* y una computadora de gran rapidez.

## EL PROBLEMA DE NUTRICIÓN

Un experto en nutrición quiere adoptar una decisión en cuanto al costo de un régimen alimenticio que llene ciertos requerimientos específicos. Se dispone de $n$ alimentos, y su costo es $c_i$. Hay $m$ elementos nutritivos (vitaminas, proteínas, minerales, etc.) que deben tenerse en cuenta. Cada alimento contiene cierta cantidad (que puede ser cero en algunos casos) de cada elemento nutritivo.



Para formular matemáticamente el problema, se puede decir que el alimento $j$-ésimo $(1 \le j \le n)$ contiene $a_{jk}$ del $k$-ésimo elemento nutritivo $(1 \le k \le m)$. El requerimiento mínimo del elemento nutritivo $i$ de la dieta completa es $b_i (1 \le i \le m)$. El problema consiste en optar por un régimen alimenticio cuyo costo sea mínimo, sin dejar de llenar los requerimiento de cada nutriente.

Sea $b_j$ la necesidad total del elemento $j$-ésimo, de modo que si $x_1$ representa la cantidad desconocida del primer alimento, $x_2$ la del segundo, y así sucesivamente, entonces

$$x_1 a_{j1} + x_2 a_{j2} + \ldots + x_n a_{jn} \ge b_j.$$

Hay $m$ de estas desigualdades, una por cada elemento nutritivo. Y si el costo de la dieta está expresado por

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n$$

el problema puede enunciarse:

Hallar el mínimo de $x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n$

a condición de que $x_1 > 0,\ x_2 > 0, \ldots, x_n > 0,$

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} &\ge b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} &\ge b_2 \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \ldots + x_n a_{mn} &\ge b_m. \end{aligned}$$

El problema queda así reducido a lo anteriormente estudiado.

## UNA OBSERVACIÓN COMPLEMENTARIA

Una de las funciones de las computadoras electrónicas en matemáticas aplicadas ha sido la de permitir generalizar y aplicar en la práctica algoritmos previamente conocidos. Si consideramos con cierto detalle un aspecto, el de la programación lineal, entramos en un terreno de las matemáticas aplicadas dominado por el cálculo electrónico casi desde su comienzo y que se puede aprender en la escuela secundaria. Tanto es así que se puede decir con justicia que, de no haberse inventado y aplicado la computadora electrónica digital, no existirían hoy muchos de los ya grandes y crecientes dominios de las matemáticas aplicadas.

Las probabilidades y la programación lineal no pasan de ser dos aspectos matemáticos cuyas aplicaciones son susceptibles de enseñanza en la escuela secundaria. Hay muchos más aspectos que también lo son. El análisis, por ejemplo, y sus bien sabidas aplicaciones a problemas en que intervienen velocidades, fuerzas, magnitudes máximas y mínimas, etc., han conquistado un puesto en el plan de estudios de centros de enseñanza preuniversitarios. El continuo uso de las matemáticas, bien para explicar o para dar origen a nuevos adelantos en materias tales como la biología, la economía, física, psicología y ecología, hace necesario que los estudiantes de secundaria entren en contacto con tales aplicaciones.



## CONCLUSIÓN

En su libro *Aspectos de la Ciencia*, hace Tobías Dantzig esta declaración final: "Oigamos pues la conclusión del asunto. Leed vuestros instrumentos y obedeced a las matemáticas, porque esto constituye el deber cabal de todo hombre de ciencia". Si esto fuera así, el hombre de ciencia necesitaría justificar su fe en las matemáticas vigentes como una estructura absoluta capaz de explicar todos los fenómenos científicos. Hoy por hoy, esto es esperar demasiado. Mejor sería recomendar al científico: "Busca modelos y explicaciones que parezcan plausibles a la luz de los datos experimentales. A continuación utiliza tus modelos como punto de partida de otros refinamientos y para derivar nuevas relaciones que a su vez puedan revelar hechos desconocidos hasta entonces de la disciplina que investigues, pero, pon siempre a prueba tus conclusiones".

Los ejemplos de este capítulo ilustran el valor de las matemáticas como ingrediente significativo del desarrollo de otras disciplinas (físicas, biológicas, del comportamiento, y sociales), así como la obligación de enseñar matemáticas que puedan resultar útiles. En la medida de lo posible, la secuencia de los temas del plan de enseñanza de las matemáticas debe estar en armonía con las necesidades inherentes al estudio de las ciencias. Los profesores de matemáticas y los de otras asignaturas que requieran de éstas, deben aunar sus esfuerzos, trabajar unidos, si bien deben enseñar por separado. Deben buscar una organización de contenido y un método de enseñanza que tiendan a asegurar la corrección, eficacia y rendimiento, tanto de las matemáticas, como de otras disciplinas.

Por supuesto, las matemáticas pueden existir como un cuerpo, por entero independiente, de saber teórico. Las estructuras matemáticas se bastan a sí mismas y sirven de punto de partida a nuevas estructuras más complejas y abstractas, las cuales, en su mayoría, llegan a tener aplicaciones útiles. El enorme acervo de saber matemático de que hoy se dispone excede la capacidad del horario asignado a la enseñanza escolar. Pero el estudio de las matemáticas gana cuando su contenido se relaciona con ideas, principios y teorías propias de otras ciencias. No obstante, como profesores de matemáticas hemos de procurar que el equilibrio entre las aplicaciones científicas de éstas y su aprendizaje por sí mismas se desplace siempre de manera que las matemáticas sobresalgan.

Se empezó este capítulo declarando que si las matemáticas no hubieran sido útiles, habrían desaparecido ya del plan de estudios de las escuelas. Voltaire observó una vez que, si no hubiera dios, el hombre tendría que inventarlo (a fin de tener en qué creer). De manera parecida, suponemos que si no hubieran otras ciencias, habría sido necesario que el profesor de matemáticas inventara algunas, a fin de que su especialidad fuese de utilidad.

# 5

## PROGRAMAS MODERNOS DE MATEMÁTICAS PARA LAS ESCUELAS SECUNDARIAS

No sería posible llevar a cabo una reconstrucción inteligente del plan de estudios que se enseña en las escuelas secundarias sin conocer a fondo los adelantos hechos en matemáticas durante el presente siglo, ya mencionados en los capítulos precedentes. Son estos adelantos los que han puesto al descubierto la unidad de contenido y métodos oculta bajo todas las ramas de las matemáticas tradicionales. De esto surgen dos criterios que facilitan dicha reconstrucción: uno, la eliminación de aquel contenido de las matemáticas tradicionales que ya no se considera útil ni práctico; y dos, la completa reestructuración del plan de modo que el aprendizaje resulte más eficaz. Con arreglo al primer criterio, por ejemplo, no hay duda que la mayor parte de la exposición sintética euclidiana de la geometría plana y del espacio puede ser eliminada en favor de métodos más generales de estudio del espacio. Según el criterio dos, los conceptos fundamentales que unifican las matemáticas actuales deben introducirse lo más temprano posible y ser aplicados desde entonces de un modo continuo. Los conceptos de conjunto y de función son dos de ellos. Los dos criterios mencionados imponen la eliminación de barreras entre álgebra, geometría y análisis.



Las matemáticas actuales --desde la más simple aritmética hasta las ideas abstractas más complejas de categorías y análisis--, se pueden presentar sucintamente como el estudio de un par ordenado (conjunto, estructura), y los desarrollos y las actividades que se deriven de dicho estudio. Por ejemplo, el álgebra elemental es el estudio del conjunto de los números reales y de sus subconjuntos importantes. La estructura de los números reales se caracteriza por las propiedades de cuerpo y por las relaciones de orden, completitud, y densidad; las actividades derivadas consisten en ejercicios con expresiones; con funciones, tales como los polinomios, exponenciales y trigonométricas; con la resolución de ecuaciones y con la aplicación de todo ello a problemas prácticos tomados de otras ciencias. La geometría tiene por objeto el estudio del espacio --(conjunto, estructura)-- donde el conjunto es una colección de elementos llamados puntos, y cuyos subconjuntos importantes son rectas y planos. Una estructura se define mediante relaciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. Las actividades consisten en el estudio de transformaciones tales como las rotaciones, reflexiones, traslaciones y sus compuestas llamadas isometrías, dilataciones (semejanzas) y transformaciones generales afines, juntamente con sus aplicaciones a la congruencia, semejanza, secciones cónicas y problemas prácticos.

### LA CONSTRUCCIÓN BELGA

Si bien G. Papy, que empezó sus experimentos en 1960, y W. Servais, presidente de la Comsión Nacional Belga sobre Matemáticas, y por mucho tiempo dirigente de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Bélgica, trabajaron por separado, sus principios sobre la construcción de un nuevo plan de estudios de matemáticas han sido por completo consistentes y compatibles. Estos principios pueden resumirse de la manera que sigue.

Al tomar conciencia de sus estructuras, las matemáticas han conseguido su unidad tomando por base la teoría de los conjuntos. La enseñanza ha de seguir la orientación que estos adelantos nos brindan, y a partir de la teoría de los conjuntos, ha de construir un edificio unificado, estructurado por ideas modernas. Esto equivale a decir que las matemáticas dejarán de enseñarse en función de propiedades especiales, y en adelante se organizarán a partir de conceptos más generales. Los nuevos programas tendrán tres objetivos que son vitales para la aplicación de las matemáticas a la física, a la biología, a las ciencias de la conducta, a saber

a. Espacios vectoriales

b. Elementos de análisis

c. Elementos de probabilidad y estadística.

Estos tres objetivos brindan lo esencial tanto para los que han de aplicarlas como para la educación matemática de la población en general. Dicho plan puede adaptarse a las condiciones particulares prevalentes en cada país, pero cualquiera sea la adaptación no deberán perder nunca de vista estos tres objetivos.



Algunas personas pueden sentir deseos de incluir en el plan la teoría de las cónicas, geometría descriptiva, geometría proyectiva, ecuaciones diferenciales, funciones hiperbólicas, teoría de morfismos, integrales múltiples, y así sucesivamente. Pero, en todo caso, debemos adoptar la actitud sensata de que todo lo que se enseñe y aprenda, se enseñe y aprenda como es debido, *sin apuro*, y con buenos resultados. Esto requiere procedimientos de enseñanza que acentúen el significado y susciten en el estudiante una participación mental con todo el dinamismo y poder creador de que sea capaz. El siguiente programa está organizado por temas particulares y en un orden de sucesión apropiado a una enseñanza unificada. No es el único orden posible. Ofrece a matemáticos y profesores de matemáticas una base para crear un conjunto de libros de texto que lleve al estudiante de segunda enseñanza a penetrar en lo que hoy se considera terreno universitario.

## UN PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICAS PARA LAS ESCUELAS SECUNDARIAS

**I. Conjuntos.** La introducción habitual a operaciones con conjuntos conducente al teorema de equivalencia y a sus aplicaciones. Algebra de los conjuntos conducente a los conjuntos potencia y a sus aplicaciones. Uso del lenguaje de los conjuntos.

**II. Relaciones.** Representación de relaciones mediante cuadros, diagramas y gráficas. El dominio y codominio. Condiciones sobre dos variables. Relaciones recíprocas y composición de relaciones. Relaciones de orden estrictas, totales y parciales.

**III. Funciones.** Función como una transformación, como una relación especial. Recíproca de una función. Tipos especiales de funciones --inyección, suryección, biyección. Inversa. Composición de funciones.

**IV. Conjunto de los números naturales.** Los números naturales, conjuntos finitos, conjuntos numerables, operaciones y orden. Inducción. División, anillo de clases residuales, módulo $n$. Teoría elemental de números. Numeración, combinatoria.

**V. La recta y el plano.** El plano como un conjunto de puntos, rectas como subconjuntos, axiomas de incidencia y paralelismo, dirección, proyección paralela. Dilataciones, aplicación de una recta sobre otra. Homotecias, translaciones, vectores, grupos de transformaciones.

**VI. Grupos.** Ejemplos y definición de un grupo. Permutaciones. Grupos cíclicos, subgrupos. Teoremas sobre grupos. Isomorfismos.

**VII. Anillo ordenado de enteros.** El grupo $(Z, +, <)$, multiplicación, el anillo ordenado $(Z, +, \cdot, <)$. Variable sobre enteros.

**VIII. La recta y el cuerpo de los números reales.** Graduación de una recta, axioma de Arquímedes, subgraduación, límites decimales, secuencias infinitas, continuidad. Números reales por construcción decimal. Razón de vectores alineados, multiplicación escalar. El cuerpo ordenado de los números reales. Los números racionales. Grupos $(Q, +, <)$; $(Q \setminus \{0\}, \cdot, <)$; cuerpo $(Q, +, \cdot, <)$. Aproximación racional de los números reales.

**IX. Cálculo numérico.** Operaciones con números reales. Errores. Logaritmos, sucesiones geométricas (G), sucesiones aritméticas (A), el isomorfismo $G \rightarrow A$, computación logarítmica de base 10, raíces n-ésima de números reales positivos. Funciones logarítmica y exponencial.

**X. Polinomios con coeficientes reales.** El anillo de polinomios de una (o varias) variables sobre un cuerpo, sobre un anillo. Valores numéricos, funciones polinómicas. El anillo euclidiano de polinomios. División por $x - a$, ceros de un polinomio, factorización, ecuaciones, inecuaciones.

**XI. El plano vectorial y geometría afín.** El grupo conmutativo de vectores en un plano $(V, +)$. Multiplicación escalar. Algebra vectorial real $(R, V, +)$. Coordenadas cartesianas de vectores y puntos. Ecuación de la recta. Sistemas de ecuaciones de dos variables.

**XII. Geometría métrica euclidiana del plano.** Perpendicularidad de rectas, simetría ortogonal respecto de un eje, isometrías y círculos. Grupo de desplazamientos, rotaciones, traslaciones, movimiento rígido. Vector unidad, distancia, producto escalar, función coseno de un ángulo. Teorema de Pitágoras, desigualdad triangular. Base ortogonal. Círculo unidad, funciones goniométricas. Fórmulas fundamentales de la trigonometría. Semejanzas planas, el grupo euclídeo, forma canónica de las cónicas. Equivalencias afines y métricas.

XIII. **Estadística descriptiva.** Estadística de una población (conjunto). Clases (subconjuntos), valuación, frecuencia, frecuencia acumulativa, representación gráfica. Distribución estadística, parámetros centrales (media, moda, mediana), variación (rango, cuartila, variancia, desviación típica). Distribución de dos variables, regresión de la media, regresión lineal y correlación.

El plan anterior corresponde al ciclo inferior de la escuela secundaria. En la mayoría de los países, dicho ciclo abarca el séptimo, octavo y noveno años escolares de niños de 12 a 15 años de edad. Sugiere un enfoque completamente nuevo de la enseñanza en estos grados, en la que, hasta hace sólo unos pocos años, los únicos temas que se enseñaban eran de aritmética con aplicaciones a ciencias sociales y al comercio, geometría métrica concreta y una introducción al cálculo algebraico. Sin embargo, se supone que, en la mayoría de las escuelas de la mayor parte de los países, donde los estudiantes en general prosiguen al segundo ciclo de la escuela secundaria, el plan anterior necesita un décimo año escolar o primer año de un ciclo superior, a fin de abarcar el programa indicado. Según experimentos hechos en Bélgica, en Alemania, Suecia, Dinamarca y Estados Unidos, es posible que el 15% de los mejores estudiantes del noveno grado aprenda el programa propuesto al terminar dicho año escolar.

El ciclo superior de la escuela secundaria continúa con el plan que sigue.



XIV. **El plano y el cuerpo de los números complejos.** Igualdad y adición. Representación geométrica en forma cartesiana. Opuestos y conjugados. El grupo (C, +). Multiplicación y el grupo de semejanzas de origen 0. Forma trigonométrica, coordenadas polares, inverso respecto de la multiplicación. Distributividad. El cuerpo (C, +, ·). Funciones lineales de números complejos. Teorema de De Moivre y raíz n-ésima de un número complejo.

XV. **Álgebra abstracta.** Grupos, subgrupos, subconjuntos generadores, grupos finitos, grupos cocientes. Anillos, cuerpos, cuerpos completamente ordenados.

XVI. **Espacios vectoriales.** Planos y rectas en el espacio, incidencia, intersección, paralelismo. Grupo de desplazamientos en el espacio. Espacios vectoriales con ejemplos, combinaciones lineales de vectores. Subespacios, intersección de subespacios. Dependencia lineal, bases, familias, espacios de dimensiones finitas. Transformaciones lineales, matriz de una transformación, isomorfismo. Cambio de base, cálculo de matrices, sistema de ecuaciones lineales. Determinantes.

XVII. **Geometría del espacio afín.** Ecuaciones de una recta, de un plano, de un segmento; división de un segmento en dos que estén en una razón dada; rectas y planos paralelos. Grupo de transformaciones afines. Invariancia del conjunto de rectas, del conjunto de planos, propiedades que se conservan. Equivalencia afín de cónicas, transformaciones particulares, subgrupos.

XVIII. Geometría euclidiana del espacio. Producto escalar. Métrica euclidiana, esfera. Bases perpendiculares, rectas y planos perpendiculares. Producto vectorial, simetría. Grupo de simetrías, rotación, simetría axial, desplazamiento, semejanzas espirales. Grupo de semejanzas en el espacio euclidiano.

Las secciones XVI, XVII y XVIII caracterizan el concepto actual de la geometría. Que el estudio se lleve o no más allá del espacio de tres dimensiones hasta el espacio de un número finito $n$ de dimensiones, depende del tiempo de que se disponga y de la selección de temas. A este estudio, correspondiente al undécimo grado escolar, se añade:

XIX. Espacio de probabilidad finita. Experimentos de azar con un conjunto finito E. Sucesos, espacio muestral, resultados, frecuencia relativa, probabilidad *a posteriori*. Axiomas de probabilidad. Sucesos dependientes, sucesos independientes, probabilidad condicional. Variable estocástica en E, esperanza, media, variancia, distribución. Distribución conjunta de dos variables en E, esperanza de una suma, de un producto, Distribución binomial. Media, variancia, ley de los grandes números.

El curso duodécimo está dedicado principalmente al análisis y sus aplicaciones. El enfoque propuesto es moderno y medianamente abstracto. Muchos educadores prefieren abordarlo de una manera menos formalista, si bien con el mismo contenido.



XX. Espacio métrico y topología. Intervalos abiertos y cerrados sobre la recta real (R), círculos abiertos y cerrados ($R^2$), esferas abiertas y cerradas ($R^3$). Regiones abiertas y cerradas de una recta, del plano y del espacio. Distancia, distancia afín. Estructura de un espacio métrico. Espacio topológico, topología de regiones abiertas, vecindades (abiertas y cerradas).

XXI. Funciones continuas. Funciones continuas de un espacio topológico E definido en un espacio topológico F. Continuidad en un punto de E, o en un subconjunto de E. Función identidad, función constante. Traslación, homotecia, proyección paralela en un espacio afín; isometrías en un espacio euclidiano. Biyección continua. Homeomorfismos, subhomeomorfismos de espacio. Composición de funciones. Funciones continuas en puntos de un plano. Estructura vectorial de funciones; sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuas. Funciones continuas de R en R (seno, exponencial y logarítmica), imagen de un segmento mediante una función continua. Anillo de funciones continuas, subanillo de funciones polinómicas. Límite de una función. Sucesiones y límite de una sucesión. Criterio de convergencia de Cauchy. Series.

XXII. Cálculo diferencial. Funciones continuas y ceros. Derivada, reglas de la suma, producto y cociente de funciones diferenciables en un punto o en un conjunto de puntos. Derivadas sucesivas. Hallar la derivada de las funciones exp, log, y de las trigonométricas sen, cos y tang. Primitivas. Funciones diferenciables en $a$, funciones diferenciables $n$ veces en $a$, cálculo de diferenciales. Fórmulas de Taylor y de MacLaurin. Límites de las funciones exp, log, sen, cos. Representaciones gráficas de funciones reales. Tangentes, máximo, mínimo, concavidad, asíntotas. Aplicaciones.

**XXIII. Cálculo integral.** La integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Integral de una función en escalera. Integrales superior e inferior de una función acotada. Integral de una función monótona en $[a, b]$. Integral de una función continua en $[a, b]$. La integral como límite de una suma. Linealidad de integrales, ley de la mediana. La integral de $f(x) = \int_a^b f(u)du$, $u = f(x)$. Primitiva de una función continua. Integración por partes. La función logarítmica definida por $L(x) = \int_a^x \frac{du}{u}$ Aplicaciones.

**XXIV. Probabilidad en una recta real.** Variables estocásticas en el conjunto de los números reales, distribución de probabilidad, distribución rectangular, distribución binomial, distribución dada por una integral. Esperanza matemática, media, variancia (dispersión). Distribución normal. Muestreo, intervalo de confianza. Descripción axiomática de un espacio de probabilidad.

El programa de matemáticas contemporáneas precedente es muy difícil para la enseñanza secundaria. Puede caracterizarse como apropiado para aquéllos, y sólo para aquéllos, estudiantes capacitados en alto grado y orientados hacia el cultivo de las ciencias. Por lo general, este grupo comprende menos del cinco por ciento de los estudiantes de una misma edad, y por cierto, en algunos países no rebasará el uno por ciento. Dado el tipo de sociedad a la que ahora pertenecemos, necesitamos realmente de estos estudiantes, altamente capacitados para que se dediquen a la ingeniería, industria, investigación y a la enseñanza universitaria; pero no menos importante es contar con un grupo mucho más numeroso de ciudadanos educados y de personal de otras carreras que estén en condiciones de entender y aplicar las matemáticas. Con este objeto, el plan belga, como se dijo ya, es demasiado abstracto, formalista, y abarca demasiado contenido para la generalidad de los estudiantes. Es de suponer que lo modifique el Comité Nacional al considerar los fines de la enseñanza general que se espera de las escuelas secundarias.



## PLANES SUECOS Y RUSOS

A continuación se enumeran los temas de la especialización científica de los gimnasios suecos, correspondiente a los cursos décimo, undécimo y duodécimo. Es de advertir que, en general, el alumnado de estos cursos tiene un año más de edad que el de las escuelas de otros países, porque la enseñanza regular empieza en Suecia a los siete años. El número semanal de clases, de 40 minutos cada una, es de 5, 5 y 6, respectivamente, en los tres grados mencionados. Se espera que prosigan este plan alrededor del 5% de los estudiantes de cada grupo de edad.

**Décimo año escolar.** 1. Teoría elemental de conjuntos. 2. Funciones. 3. Los números racionales. 4. Ecuaciones lineales, desigualdades y sistemas de ecuaciones. 5. Los números reales. 6. Raíz cuadrada. Ecuaciones de segundo grado. 7. Potencias de exponente real. 8. Aproximaciones, error absoluto y relativo, interpolación lineal. 9. Vectores coplanares, multiplicación escalar. 10. Coordenadas ortonormales. 11. La función lineal. 12. Logaritmos. 13. La regla de cálculo. 14. Funciones trigonométricas. 15. Producto escalar de vectores. 16. Los teoremas del triángulo (funciones seno y coseno). 17. Estadística descriptiva (gráficas, media, mediana, desviación típica, suma, máquinas de calcular).

Undécimo año escolar. 18. Funciones racionales. 19. Límites. 20. Continuidad. 21. Derivación (cálculo diferencial). 22. Composición de funciones. 23. Máximo y mínimo. 24. Derivadas de orden superior (convexidad). 25. Integrales (integrales y primitivas, cálculo integral, áreas). 26. La función logarítmica (logaritmos naturales). 27. Funciones inversas (existencia, continuidad, funciones ciclométricas). 28. Función exponencial. 29. Función potencial.

Duodécimo año escolar. 30. Números complejos. 31. Ecuaciones diferenciales (lineal, coeficientes constantes, primero y segundo grado). 32. Métodos especiales de integración (parcial, sustitución). 33. Aproximaciones mediante polinomios, fórmula de MacLaurin. 34. Funciones vectoriales. 35. Secciones cónicas. 36. Vectores en el espacio, sistemas de coordenadas ortonormales. 37. Volumen. 38. Área de supeficies curvas. 39. Sucesiones y series (convergencia y divergencia, series geométricas). 40. Combinatoria (principio fundamental, permutaciones, combinaciones, teorema del binomio, inducción). 41. Teoría de probabilidades (concepto clásico, espacio muestral, espacio muestral infinito, distribución binomial y normal). 42. Inferencia estadística (distribución normal, intervalos de confianza, regresión).



Esta simple enumeración de temas destaca las diferencias entre los planes belga y sueco. El sueco es informal en alto grado e intuitivo, y se concentra en hacer matemáticas; el belga es estructurado en gran medida y riguroso, y se concentra en la demostración de teoremas. El plan sueco empieza muy temprano con análisis y prosigue su estudio por más de dos años; el belga intensifica el estudio del análisis en el curso final. En el plan sueco se echa de menos la atención directa a las estructuras --en especial de espacios vectoriales y álgebra lineal--, mientras que estos temas estructurales constituyen el núcleo central del plan de Bélgica. Se puede sacar la conclusión de que el plan sueco adiestra a los estudiantes para que *hagan uso* de las matemáticas, en tanto que el plan belga los prepara para que ensanchen el campo matemático. Los intereses primarios de un país determinan, en gran medida, el plan de estudios y el énfasis que se otorga a ciertos temas del plan. El plan belga es único por enfocar la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de los matemáticos. El plan danés es muy parecido al sueco.

Desde diciembre de 1964, la Unión Soviética ha venido elaborando un nuevo plan de enseñanza de las matemáticas escolares. Trabajan en este proyecto más de 500 personas entre investigadores, educadores y profesores, bajo la dirección de A. Markuschevitch. El propósito de esta comisión es elaborar un plan completo y obligatorio de enseñanza de matemáticas para todos los niños de 7 a 17 años de edad, que se enseñará en escuelas cuyo plan de estudios tenga una duración de diez años. En el plan en curso de elaboración se procura tener muy en cuenta las relaciones de su contenido con los adelantos de las ciencias, de la tecnología y con la cultura de la sociedad soviética en general. Dado que los niños en Rusia empiezan la escuela a los 7 años, y dedican al estudio de las matemáticas 6 períodos por semana (en vez de los 5 que le dedican en el resto de Europa y en América), en un lapso de diez años tienen tantas horas de clase (o más) que los de otros países en 12 años. Su nueva escuela primaria durará tres años, y la secundaria, siete años. En los cuatro años finales (7° a 10° inclusive) los estudiantes de ciencias y, en particular los de matemáticas, tienen opción a una hora más de enseñanza matemática. La preparación de material docente compete a una subcomisión presidida por el académico A. Kolmogorov.

El decidir el contenido del plan destinado a la formación general del estudiante es un asunto difícil; en cambio, el plan de las escuelas especiales de matemáticas, donde el estudiante se prepara para ingresar en la universidad, no presenta dificultad. El asunto de qué materias debe haber en un curso general, del orden en que deben presentarse y de cuál debe ser el grado de generalidad y profundidad de su estudio, no tiene respuesta única. La selección depende de criterios generales, tales como el de contribuir a una cultura general, a la formación de lo que pudiéramos llamar una filosofía científica y al de ofrecer una comprensión del papel de las matemáticas en la ciencia y en la actividad práctica del hombre. Así, en el décimo año, los elementos del análisis y los vectores ocupan una posición preponderante. La teoría de las probabilidades no figura en el plan obligatorio, pero el cálculo combinatorio se enseña en el noveno año escolar.



Ni la teoría de los conjuntos, ni la lógica ni el álgebra moderna son objeto de tratamiento explícito. Estos puntos no figuran en los exámenes, pero se exponen de un modo progresivo y moderado. Hay también una limitación del simbolismo. Los matemáticos rusos creen que, si bien el simbolismo reciente es importante para los matemáticos y el especialista, no es necesario para la cultura general del individuo. Ciertas generalidades sobre conjuntos y lógica se empiezan a enseñar en el cuarto año; en el sexto se inicia al alumno en implicaciones y equivalencias relativas al álgebra y a la geometría, y desde el mismo año hasta el octavo inclusive, se trata la geometría axiomática a partir de doce axiomas (dos de ellos sobre la medida de ángulos). Fieles a una tradición, los programas insisten en un dominio absoluto de ciertas técnicas esenciales --cálculo aritmético preciso, cálculo algebraico complejo y desenvolvimiento de la intuición espacial. Se consigue esto mediante la práctica sistemática y prolongada de resolver problemas y hacer ejercicios seleccionados con esmero.

Este plan tiene en cuenta el enlace con la enseñanza de la física, química, geografía física, dibujo industrial y enseñanza profesional. Ciertos conceptos matemáticos se adquieren en las clases de física y ciertos problemas de ésta se resuelven en las clases de matemáticas. Se destacan los métodos numéricos y la comprensión y utilización del equipo electrónico de cálculo. En el décimo año se hacen aplicaciones a problemas económicos y a programación lineal.

Tal es una breve descripción de la reforma rusa de la enseñanza de las matemáticas. Se puede adquirir una idea del espíritu de la enseñanza rusa mediante las observaciones finales de Markuschevitch. contenidas en su discurso pronunciado con ocasión del Congreso de Lyon, que se traduce libremente así: "en conclusión, permítanme dedicar unas palabras a un aspecto de la enseñanza de las matemáticas al que los matemáticos no han concedido la importancia que merece. Durante los últimos años, un gran número de personas del mundo culto acusaron a la juventud de falta de interés por las más nobles actividades mentales, como el arte y la poesía, y explicaron esta actitud como debida a la malévola influencia de las ciencias exactas y de la técnica moderna, que destruye, decían, todo lo que es humano en el hombre."

"Estos adversarios han citado, entre sus argumentos, el ejemplo de los estudiantes de una de nuestras escuelas para especialistas en programación electrónica. Estos simpáticos estudiantes escribieron sobre la puerta de entrada de la escuela: "No sólo queremos ser matemáticos, sino hombres también". Es evidente que esta declaración merece respeto y aprobación. Sin duda todos los lectores la comparten. Pero ¿por qué no han de aparecer estas palabras sobre la entrada de todas las escuelas de arte? ¿Por qué los estudiantes de las escuelas de música no expresan su ambición de llegar a ser, no sólo músicos, sino seres humanos por añadidura? ¿Garantiza el estudio del arte o la educación artística el desenvolvimiento de aspectos superiores de la personalidad? En la actitud recelosa de quienes prevén en el desenvolvimiento de las ciencias exactas una amenaza de los ideales humanitarios, se manifiesta un brote renovado de los prejuicios seculares a que hubo que hacer frente antes, en la época del renacimiento. ¿Se puede concluir que los matemáticos, entre otros, sólo se preocupan del intelecto y nada tienen que ver con la emotividad, la imaginación, los ideales sociales y la moral de la juventud que formamos? ¡No, por cierto! Estoy convencido de que la cuidadosa organización del estudio de las ciencias naturales y de las matemáticas puede ejercer gran influencia en la formación de la personalidad de la juventud, influencia que se puede discernir en la mayoría de los casos. Los matemáticos, por sus propios medios, pueden contribuir a la plena eclosión de la naturaleza humana."



No es cuestión de cultivar, total o parcialmente, las cualidades mentales, el carácter, la capacidad de trabajo y la valoración crítica del propio trabajo. El estudio de las matemáticas y de las ciencias naturales pueden fomentar el desenvolvimiento de las emociones, del deseo de ayudar a nuestros vecinos. Toda ciencia es en verdad una creación del genio humano, a la que todos los pueblos han contribuido. Y sólo habremos cumplido nuestro deber con las generaciones jóvenes cuando les hayamos hecho saber, mediante nuestras lecciones, que la ciencia es una investigación inacabable en pro de una vida más valiosa de los seres humanos, una investigación que requiere gran tesón, laboriosidad y energía heroica; este deber para con la juventud se habrá cumplido cuando le hagamos sentir otra vez qué coraje sin límites, qué amor a los semejantes, qué sacrificios se ocultan bajo las escuetas líneas de los principios científicos, bajo las fórmulas y los teoremas.

## ESTUDIO DEL MEJORAMIENTO DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA (SSMCIS)

El Estudio del Mejoramiento del Plan de Estudios de las Matemáticas en las Escuelas Secundarias, en estos momentos en su quinto año de investigación y experimentación, se propone elaborar un plan unificado de estudio de las matemáticas, de seis años de duración, para estudiantes en los grados séptimo a duodécimo, que aspiren a ingresar en la universidad. Este proyecto tiene por centro coordinador el Teachers College, de la Universidad de Columbia.

Durante el período 1955-65, Estados Unidos se dedicó a la revisión de la enseñanza primaria y secundaria de las matemáticas, en especial a poner al día el plan entonces existente. En gran medida fueron aceptadas las recomendaciones hechas por la Comisión de Matemáticas del Tribunal de Exámenes de Ingreso en la Universidad. En todos estos movimientos de reforma se ha mantenido la división tradicional de la enseñanza de las matemáticas en asignaturas separadas de aritmética, álgebra y geometría. En fecha reciente, tanto en Estados Unidos, como en Europa, se han hecho, como vimos, recomendaciones más radicales a este respecto. De acuerdo con ellas el plan de enseñanza debe ser reconstruido en su totalidad a fin de ofrecer un cuerpo integral de doctrina que refleje el espíritu de las matemáticas actuales y permita enseñar en las escuelas secundarias muchos temas que, con anterioridad, se consideraban propios de la enseñanza universitaria.



Para empezar a llevar a efecto estas recomendaciones sobre un plan de estudios de matemáticas para las escuelas secundarias, el SSMCIS dio comienzo a una planificación de largo alcance en una reunión de consultores (matemáticos y educadores en general) celebrada en noviembre de 1956. Los participantes bosquejaron un procedimiento de elaboración de un programa total, que iría seguido de conferencias sobre el programa escolar, la redacción de libros de textos experimentales, la preparación de profesores, enseñanza piloto y la evaluación de resultados. En junio de 1966, un grupo de dieciocho matemáticos y educadores norteamericanos y europeos se reunieron por un lapso de veinte días para bosquejar el alcance y la secuencia de los temas del programa completo de seis años y para hacer recomendaciones específicas y detalladas respecto al contenido matemático del primer curso (séptimo grado). Estas recomendaciones se entregaron a un equipo de ocho educadores matemáticos, todos ellos con experiencia en enseñanza secundaria, quienes escribieron el primer curso experimental durante julio y agosto de 1966. Durante el verano se dieron cursos especiales de álgebra y geometría en el planteo actual a veinte profesores que enseñaron las primeras diez clases experimentales durante el año escolar subsiguiente, a razón de dos profesores por clase.

A partir de entonces, se celebró cada año en el mes de junio una conferencia de 10 a 14 días de duración dedicada a revisar los textos del curso precedente y a hacer recomendaciones sobre el contenido y la enseñanza del curso nuevo, cursos II, III, IV y V, respectivamente. Al igual que el primer año, estas conferencias fueron seguidas de ocho sesiones de redacción y seis semanas de cursos de preparación de profesores. Este programa se espera que continue hasta junio de 1973, fecha ésta en que la serie de seis años habrá sido escrita, puesta a prueba experimentalmente, evaluada y revisada.

## ESTRUCTURA DEL PLAN DE ESTUDIOS EMERGENTE

Desde el comienzo del estudio era bien sabido que las matemáticas teóricas se pueden organizar en función de conceptos fundamentales y estructuras. Esto se había puesto fuera de duda gracias a investigaciones llevadas a cabo a fines del siglo pasado y comienzos del presente, y también a la gran labor de Bourbaki durante la década 1930-40. Lo que no se sabía era cómo esta organización formal se podía utilizar como un paradigma para la elaboración de un plan adecuado a la enseñanza secundaria. Pese al hecho de contar con elementos de guía para su elaboración, procedentes de experimentos recientes y de conferencias sobre contenido de los programas celebradas en Europa, en parte alguna se había diseñado, elaborado y puesto a prueba un plan de enseñanza matemática totalmente unificado que abarcase los grados 7 a 12.

Todo plan de enseñanza de una disciplina ha de ser concebido con el fin de lograr ciertas metas educativas. Las del programa SSMCIS se caracterizan simplemente por los adjetivos *intelectual, informativo* e *utilitario*. El estudiante debe llegar a saber qué son las matemáticas, de qué tratan, qué tipo de pensamiento ponen en juego y cómo desarrollar éste. Tal es la meta intelectual. También debe el estudiante aprender aquella parte de las matemáticas tradicionales o de reciente creación que se considera esencial en la vida diaria de todo ciudadano educado, así como la destreza requerida para su uso. Tal es la meta informativa. Finalmente, a fin de que sean útiles, el estudiante ha de aprender a aplicar lo aprendido, tanto para enriquecer y ensanchar su saber matemático en sí, como para estudiar otras ciencias --naturales, biológicas y del comportamiento. Tal es la meta utilitaria.

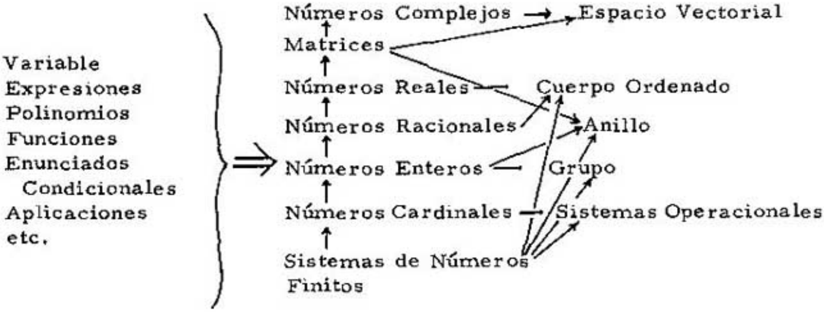


Para alcanzar estos fines conviene reiterar que todas las matemáticas actuales, desde la simple aritmética hasta el álgebra y análisis más abstractos, han de ser consideradas como el estudio de los "conjuntos y estructuras", y todas las actividades derivadas de aquél. En el plan se desenvuelven con amplitud y complejidad crecientes, (1) los conceptos de conjunto, relación, función y operación; (2) las estructuras fundamentales de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial; (3) los importantes resultados de estas estructuras: los varios sistemas numéricos; las geometrías sintética, de coordenadas, de vectores y de las transformaciones, y análisis; y (4) las aplicaciones a la estadística, probabilidades, física, análisis numérico y computadoras digitales.

El plan que va emergiendo es --valiéndonos de un término bioquímico-- una especie de hélice doble en la cual los conceptos abstractos y estructuras, a modo de núcleo, se despliegan a la par de los resultados importantes de la sólida experiencia práctica de las materias tradicionales. A fin de entrar en más detalle, conviene considerar por separado el contenido algebraico, geométrico, analítico y las aplicaciones del plan. Cómo se enlazan todas estas ramas en una totalidad unitaria es cosa que se evidenciará al relacionar el lector, por sí mismo, la sucesión de temas en cada una de ellas.

### La Enseñanza Algebraica

La enseñanza algebraica se vale del punto de vista del álgebra actual expuesto en el capítulo 2. Así, el álgebra es el estudio de estructuras, de sus resultados y de sus subsecuentes actividades. Los conceptos fundamentales y las estructuras se presentan informal e intuitivamente a los alumnos de séptimo grado, y luego en los grados sucesivos se van desarrollando con rigor y profundidad crecientes. Este desarrollo paralelo y coordinado se muestra parcialmente en el diagrama que sigue.




Para destacar aún más claramente el espíritu del desenvolvimiento del álgebra, obsérvese la siguiente introducción correspondiente al programa de séptimo grado. Empieza éste con la exploración del sistema de los números finitos designado por $(Z_4, *, \cdot)$ y sus propiedades contrastan con las del sistema de los números enteros. Se resuelven enunciados abiertos, y se definen dominio y variable, se descubren los elementos neutros, se investiga los simétricos, se ponen a prueba las leyes conmutativa y asociativa, y tras la corroboración de la ley distributiva, se estudia un sistema referido a dos operaciones. Se señala la propiedad del 0 en cuanto factor de la multiplicación.

Todos estos hechos procedentes de situaciones concretas allanan el camino para abordar, en un plano general, el concepto de *operación binaria* y sus propiedades. En cursos posteriores se tratan otras operaciones, como la unitaria o la ternaria. La *binaria* se define por lo general en un conjunto E como la asignación de un elemento de este conjunto a cada par ordenado del conjunto producto E × E. El concepto de un sistema operacional se presenta como un par (conjunto, operación), que es un conjunto de números asociados con una operación binaria cuyos datos son elementos del conjunto de tales números. Para los números de la esfera del reloj y para los números cardinales se considera en primer lugar las operaciones corrientes (adición, multiplicación) y luego la substracción, la división y la potenciación. También se consideran otras operaciones, tales como máximo, mínimo, primer elemento, segundo elemento, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, pitagórica y otras, y en cada caso se estudia cada sistema en lo que atañe a conmutatividad, asociatividad, existencia de un elemento neutro o el inverso de un elemento. Las operaciones se definen mediante tablas o reglas y se simplifican expresiones que contienen operaciones. Finalmente, se señalan y destacan las propiedades de grupo por su importancia en el estudio de matemáticas en general. A continuación los estudiantes resuelven enunciados abiertos en varios sistemas operacionales, y acaban por reconocer que el dominio de las variables y las estructuras son puntos de importancia matemática.

Tras esto se aborda el concepto de función por medio de transformaciones. Una vez representadas muchas relaciones mediante diagramas de flechas, se destacan por su importancia aquellas en las que de cada elemento del dominio sólo parte una flecha; estas relaciones se denominan "aplicaciones". Los números de la esfera del reloj se aplican en otros de la misma clase mediante reglas tales como $x \to x + 2$; $x \to 2x$; $x \to 2 - x$; etc. También se establecen aplicaciones entre unos números enteros y otros. Los diagramas de flechas se utilizan para indicar aplicaciones entre puntos de la recta numérica y se hacen composiciones de aplicaciones $f \circ g$ que se lee $f$ sigue a $g$. Estas aplicaciones dan lugar a práctica de manejo de variables, por ejemplo, si $x \xrightarrow{f} x + 3$ y $x \xrightarrow{g} 2x - 4$, resulta $f \circ g \to (2x - 4) + 3 = 2x - 1$, si bien $g \circ f \to 2(x - 3) - 4 = 2x + 2$, etc. También son objeto de investigación la aplicación identidad y la existencia de la inversa de una correspondencia. Después de dos meses de trabajo, los jóvenes estudiantes, escriben, discurren y emplean expresiones variables, operaciones, correspondencias o funciones, y resuelven enunciados abiertos, además de aprender a utilizar y disfrutar nuevo simbolismo.

Estos dos meses de estudio reflejan el espíritu en que se desenvuelve al álgebra subsiguiente. Subsiste la manipulación tradicional de expresiones y de resolución de ecuaciones, pero enfocada desde un punto de vista actual. Se trabaja con números de la esfera del reloj y con números cardinales y luego se pasa a estudiar los números enteros con estructuras de grupo y anillo, utilizando en el aprendizaje un enfoque formal y abstracto. Entonces los irracionales se convierten en una ejemplificación de la estructura del cuerpo. Se introducen los números reales, que hacen su aparición al tratar de resolver la ecuación $x^2 = 2$, y la aplicación del extremo superior, y se les da una estructura de cuerpo completo y ordenado. Se destacan los grupos y los cuerpos como entes matemáticos objeto de estudio especial por derecho propio.



Las matrices se introducen pronto en la enseñanza, y por su papel en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales llevan al teorema de Gauss-Jordan y al álgebra de matrices. Las matrices y los polinomios proporcionan ejemplificaciones de la estructura anillo. Un modelo de matriz contribuye al desarrollo de los números complejos y a su representación en el plano complejo. La importante estructura de espacio vectorial y su álgebra lineal resultan de la suma de pares, ternas, y $n$-uplas, a la vez que de la multiplicación escalar.

El álgebra lineal se generaliza al estudiar los subespacios, las transformaciones lineales, núcleo e imagen. Las matrices están asociadas con las transformaciones, la composición de transformaciones lineales está asociada con la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, y las transformaciones inversas, con la inversa de una matriz. Se completa el estudio de las inversas de matrices.

La potenciación se introduce en la forma usual a partir de los números enteros positivos, y prosigue hasta la interpretación del caso en que el exponente es cualquier número real. De este modo se echan las bases para el estudio de la función exponencial como una correspondencia, elemento a elemento, entre el conjunto de los números reales y el conjunto de todos los números reales positivos. Esta función tiene una correspondiente inversa: la función logarítmica, la cual nos lleva a los logaritmos vulgares o decimales y a sus tablas, inclusive la notación científica y a sus aplicaciones al interés compuesto, al crecimiento orgánico y al desarrollo sin formalismos de los logaritmos naturales.

Los temas algebraicos restantes tratan de la ampliación a $n$ dimensiones del álgebra lineal, donde $n$ es finito, a los métodos de cálculo numérico de las raíces de una ecuación polinómica y a aplicaciones del álgebra al análisis.

### La Enseñanza Geométrica

Como se mostró en el capítulo 3, el desarrollo de la geometría es posterior al del álgebra. Durante más de 2 000 años, de Euclides a Lobachevsky, sólo hubo un espacio --espacio de tres dimensiones, de Euclides-- y sólo una manera de estudiar el espacio, la geometría sintética de Euclides, edificada axiomáticamente. Una época enteramente nueva de creaciones geométricas alboreó con la aparición de las geometrías no-euclidianas y con la publicación de los trabajos de Riemann donde se muestra la posibilidad de extender la geometría a un número ilimitado de espacios. El desarrollo de la geometría y de su correlativa la topología prosigue hoy día en todas direcciones. Las geometrías objeto de estudio e investigación en estos momentos son, entre otras, la del espacio proyectivo, la del espacio euclidiano, la del espacio de cuatro, $n$ e infinitas dimensiones, la de los espacios de Riemann, la de los espacios topológicos, etc. Estas geometrías tienen hoy aplicaciones tanto en la esfera de las mismas matemáticas como fuera de ella. Es fácil reconocer que la geometría actual es una materia de estudio por entero distinta de la geometría sintética de Euclides.



El caso es que la manera de tratar la geometría sintética euclidiana se halla al margen de la corriente del pensamiento matemático de nuestros días, y que no tiene aplicaciones ni en las matemáticas puras ni en las aplicadas (si se exceptúan algunos investigadores de los fundamentos). Esta forma de estudio tiene que ser abandonada y el espacio debe ser relacionado tan pronto como sea posible con las estructuras y con las técnicas algebraicas. La enseñanza de la geometría en el plan SSMCIS refleja este punto de vista.

La enseñanza de la trigonometría empieza siendo intuitiva, y parte de retículos de puntos. Se da por supuesto que las figuras más simples, el paralelismo, las perpendiculares y la recta numérica son bien conocidos desde la escuela primaria. Y así los puntos de los retículos se asocian de inmediato con los pares de enteros ordenados y con el sistema de coordenadas. Al conjunto de los pares ordenados se le imponen condiciones para que representen puntos específicos, lo cual permite la representación geométrica de condiciones algebraicas en dos variables, incluso el estudio de las relaciones $\langle , \rangle$ y las relaciones de valor absoluto. Las condiciones compuestas conducen a la intersección y unión de conjuntos de puntos. Finalmente, mediante juegos con retículos de puntos, incluso con fichas de damas, se adquiere habilidad en el manejo de pares de números ordenados y en hallar su correspondiente imagen en el plano. Esto se generaliza a las ternas de números ordenados y a sus imágenes en el espacio, todo de manera intuitiva. Completan este estudio de la geometría las dilataciones en el plano $(x, y) \xrightarrow{d} (ax, by)$, limitadas a los enteros.

La enseñanza se amplía al tratamiento de las transformaciones en el plano. Al comienzo esta enseñanza recurre a actividades tales como el doblado de papeles, medidas y construcciones por medio de dibujos. El alumno obtiene un concepto más preciso de semirrecta, segmento rectilíneo, reflexiones con respecto a una recta y con respecto a un punto, traslaciones, rotaciones e isometrías en el plano, al mismo tiempo que se infiere la primera idea de la simetría. El primer paso de la geometría abstracta consiste en recurrir a las coordenadas en la recta y en el plano, y en tratar temas como *entre, intersección, unión, medida, distancia* e *isometrías* por medio de las coordenadas. Se definen el ángulo y su medida por medio de un transportador, es un número $m$ tal que $0° \leq m < 180°$. Se estudian las propiedades fundamentales de la isometría (reflexiones, translaciones, rotaciones), y se las utiliza para derivar otras propiedades, por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo.

Se hace un examen de la lógica elemental y se aplica en una introducción de la geometría sintética axiomática. Se trata de una geometría afín con sólo *tres* axiomas y algunas definiciones. A partir de estos axiomas se pueden demostrar dieciséis teoremas (en el libro se da la demostración de sólo cuatro). Como un modelo en que todos los teoremas son susceptibles de interpretación, se pone un ejemplo no geométrico, más concretamente, de comandos y escuadras. También se ponen otros modelos o ejemplos, tanto finitos (geometría de 9 puntos) como infinitos. La equivalencia de clases de rectas paralelas lleva a la proyección paralela y un par de puntos ordenados (X, Y) se convierte en las coordenadas geométricas de un tercer punto en el plano. Esta es la base de la construcción de un plano coordenado mediante la aplicación de los números enteros, luego de los racionales y, finalmente, de los reales. Termina el capítulo con la equivalencia de clases de vectores libres en un plano, conducente a un grupo de traslaciones en dicho plano.

Una vez estudiados los números reales, hay una introducción a la geometría de las coordenadas. A los axiomas de la geometría sintética del capítulo 3 se añaden tres otros axiomas sobre proyecciones de rectas paralelas y coordenadas que relacionan puntos (entidades geométricas) con coordenadas (números reales). A esto siguen el estudio de los segmentos y división de segmentos, ecuaciones de la recta, aplicación a triángulos y cuadriláteros, y la admisión sin prueba del teorema de Pitágoras relativo al triángulo rectángulo, y la fórmula de la distancia.

Las transformaciones se estudian por medio de coordenadas y geometría de coordenada. El grupo de isometrías lleva al estudio de las congruencias y a la simetría. Se hace una breve presentación de las dilataciones y de la semejanza. Se desarrolla la teoría de la medida de longitudes y de superficies y se aplica a figuras rectilíneas y a la circunferencia y al círculo. Se discute el número real $\pi$. A modo de suplemento, hay un capítulo de introducción a la geometría de masas puntuales en el plano. Al finalizar estos estudios, el alumno tiene una idea bastante completa de la geometría física intuitiva, de la geometría sintética abstracta, de la geometría de coordenadas y del plano vectorial como medios distintos para abordar el estudio del espacio de dos dimensiones.

Se inicia de modo intuitivo el estudio y la representación gráfica de puntos, rectas y planos en el espacio de tres dimensiones, así como del paralelismo y de la perpendicularidad. Se introducen las coordenadas del espacio afín de tres dimensiones y se obtiene la fórmula del punto medio y de la distancia. También se estudian las superficies y los sólidos en el espacio, con un tratamiento informal.

Una vez definido y representado el espacio vectorial, el estudio geométrico se hace extensivo a la geometría vectorial de dos y de tres dimensiones. Y esto tiene una doble finalidad: la estructura espacio vectorial sirve de guía para la construcción de la geometría vectorial, y las geometrías resultantes del espacio de dos y de tres dimensiones sirven de ejemplo del espacio vectorial y permiten la ampliación a un espacio vectorial de $n$ dimensiones. La definición del producto interno lleva a la perpendicularidad y al espacio euclidiano.



En el estudio de la trigonometría tiene lugar otra unificación del álgebra y de la geometría. Utilizando el plano orientado, se define un ángulo orientado como un par ordenado de semirrectas del mismo origen. Valiéndose luego de la circunferencia unidad en un plano coordenado, se definen las funciones *angulares* SENO y COSENO. Ya establecida la medida de un ángulo orientado, se lleva a cabo una composición para convertir el seno y el coseno en funciones de números reales. Se obtienen las leyes del seno y del coseno y se aplican a la resolución de triángulos. Las funciones se representan gráficamente.

El estudio de la trigonometría se amplía al grupo aditivo de ángulos orientados, y la matriz rotacional da las fórmulas del seno y del coseno de la suma de dos ángulos. Esto permite la representación trigonométrica de los números complejos, así como el estudio de ciertas semejanzas. La función envolvente permite extender las funciones a todos los números reales y al análisis trigonométrico de las funciones con aplicaciones. A continuación se definen y estudian las funciones trigonométricas restantes --tangente, cotangente y cosecante.

En esencia, el programa de geometría contiene los siguientes temas principales:

1. Grupos de Transformaciones — Aplicaciones

| | |
|---|---|
| a. Simetría lineal | b. Simetría respecto de un punto |
| c. Traslaciones | d. Simetrías axiales |
| e. Rotaciones | f. Simetrías oblicuas |

g. Deslizamientos

h. Dilataciones

De este estudio surgen isometrías y homotecias y sus relaciones con congruencias y semejanzas.

2. Geometría afín

a. Sintética

b. Geometrías finitas

c. Números reales y la recta

d. Coordenadas

e. Geometría analítica

f. Vectores y espacios vectoriales

3. Geometría euclidiana

a. Perpendicularidad

b. Producto interior

c. Espacios vectoriales, normas

d. Trigonometría

4. Cónicas

a. Lugar geométrico

b. Transformaciones afines

c. Las cónicas

d. Formas cuadráticas

Probabilidades, Estadística, Análisis



Como sucede con otras ramas de las matemáticas, las probabilidades empiezan a enseñarse en el séptimo grado y se amplían en años sucesivos de acuerdo con un enfoque de círculos concéntricos. Se empieza la enseñanza por experimentos en que se destacan empíricamente las propiedades de frecuencia relativa de los sucesos en un espacio de resultados posibles, y se aplican a problemas prácticos. En años sucesivos se recurre a la teoría combinatoria, teoría de conjuntos y al teorema de Newton, así como a sucesos equiprobables para entrar luego en la probabilidad uniforme y en los axiomas de un espacio de probabilidad. Para desarrollar la teoría de sucesos dependientes e independientes, se parte de la probabilidad condicional. Se hacen otras aplicaciones de los trayectos aleatorios, de los números al azar y de las cadenas de Markov. Se recurre con frecuencia a los diagramas ramificados ("tree diagrams"). El binomio de Newton tiene aplicación práctica en genética y en la industria. El estudio de este tema se amplía a la expectación, la variancia, variables estocásticas y la ley de los grandes números.

En concomitancia con las probabilidades, se estudia la estadística descriptiva, la tabulación y la representación gráfica de datos numéricos. Mediante la observación de distribuciones, se entra en el estudio de la tendencia central y de la variación para destacar la media aritmética y la variancia. Los diagramas de dispersión de pares de observaciones conducen a la adaptación de rectas a los puntos del diagrama y al estudio de la regresión.

El programa del análisis empieza en el grado undécimo con una visión panorámica del tipo de problemas que se pueden resolver mediante el cálculo. La introducción al cálculo se hace por vía del examen intuitivo si bien preciso de la continuidad de las funciones reales, en un punto y en un intervalo. Esto lleva al estudio de límites y de sus propiedades. El primer contacto con la noción de derivada se establece mediante la aproximación a un punto de una curva por una función lineal. A esto sigue la definición corriente del cociente diferencial y de la teoría de derivadas en un punto. Se presta mucha atención a la aplicación de las derivadas, tanto en las mismas matemáticas como en física y otras ciencias.

El cálculo integral se aborda por medio de funciones lineales escalonadas, y de aproximaciones crecientes de áreas y volúmenes. Sigue el estudio usual de la integral de Riemann, la antiderivada, el teorema fundamental y los métodos de integración, simultáneamente con algún cálculo de dos variables.

El análisis numérico va precedido de un estudio de diagramación de flujo de algoritmos. La naturaleza de la programación para la computadora digital se aborda mediante el estudio y la aplicación de BASIC. Es conveniente que todas las escuelas tengan una consola conectada con una computadora electrónica central. Una vez aprendida la programación, se aplica a la solución aproximada de problemas de álgebra, geometría, probabilidades y análisis.

El programa total, como matemáticas unificadas, se esquematiza en el diagrama de la página 108. A continuación de éste figura una tabla que da una lista de títulos de capítulos.



Tal es el propósito del plan de estudios SSMCIS --es decir, procurar que los jóvenes capaces que aspiren a seguir estudios universitarios, al graduarse en la escuela secundaria, hayan ganado de medio a un año de estudios de lo que hoy se considera el plan universitario de licenciatura en matemáticas. Esto se consigue:

1. Estructurando y unificando el estudio de las matemáticas.
2. Eliminando todos los puntos innecesarios del plan actual.
3. Utilizando métodos pedagógicos acertados de enseñanza.
4. Utilizando el libro de texto como *el* material primario de enseñanza, el que puede ser leído y estudiado por el alumno. La sala de clase se destina al diálogo, a la investigación, clarificación y animado intercambio intelectual entre estudiantes y entre éstos y los profesores.

Los tres programas y la descripción de la reforma rusa, tal como se exponen en este capítulo, muestran la tendencia de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias en los años que se avecinan. Puede resumirse por su propósito de ofrecer:

1. Un punto de vista actual del álgebra como el estudio de estructuras, de las objetivaciones de sus sistemas numéricos y de las aplicaciones derivadas de los mismos. Constituirá un cuerpo de conocimientos que abarca mucho de lo que hoy se enseña en la universidad, y preparará a los estudiantes para comenzar el estudio riguroso del álgebra abstracta y de los espacios vectoriales de nivel universitario.

2. Un punto de vista moderno de la geometría como un estudio de espacios, relacionado eventualmente con las estructuras algebraicas, en especial con los espacios vectoriales y con el álgebra lineal. Este es un punto de vista que hoy no figura en los programas universitarios sobre la materia, si bien está llamado a ser conocido por toda persona educada, en general.

3. Un enfoque unificado del estudio de las matemáticas, construido a partir de los conceptos de conjunto, relación, función y operación, y donde las estructuras vinculan toda la enseñanza en un proceso concéntrico continuo.

4. La aplicación de las matemáticas no sólo a la física, sino en el nuevo campo de las ciencias del comportamiento, donde las probabilidades y las matemáticas finitas son en extremo importantes, acaso más aún que en análisis.

5. Una introducción al análisis, intuitiva y semirrigurosa, que abarque la parte elemental del cálculo de dos variables.

La puesta en marcha de este plan requiere reeducar el profesorado de estas materias, así como un enfoque dinámico de la enseñanza. Estos aspectos se discuten en los capítulos que siguen.

Diagrama


PROBABILIDAD
ESTADÍSTICA
CÁLCULO
(ANALISIS)
NUMÉRICA
MATEMÁTICA
(COMPUTADORA)
ESPACIO EUCLIDIANO
VECTOR
COORDENADA
SINTÉTICA
AFÍN
TRANSFORMACIÓN
REPRESENTACIÓN DE FIGURAS
PUNTOS
REALIZACIÓN
ESPACIO VECTORIAL
CUERPO
ANILLO
GRUPO
SISTEMA OPERACIONAL
RELACIONES
APLICACIONES
CONJUNTOS
ESTRUCTURA
NÚMEROS COMPLEJOS
MATRICES
REALES
RACIONALES
ENTEROS
NÚMEROS NATURALES
NÚMEROS FINITOS DEL RELOJ
NÚMEROS
REALIZACIÓN
AXIOMÁTICA
PRUEBA
TRANSFORMACIONES
Afín
Lineal
Construcciones
SEMEJANZA
Homotecia
ISOMETRÍAS
Congruencia
ACTIVIDADES
PRUEBA
PROBLEMAS
GRÁFICAS
ENUNCIADOS
Ecuaciones
Inecuaciones
Valor Absoluto
FUNCIONES
Polinomial
Racional
Real
Exponencial
Logarítmica
Trigonométrica
Inversa
EXPRESIONES
VARIABLE
ACTIVIDADES

Tabla

## TÍTULOS DE LOS CAPÍTULOS DE UN PROGRAMA MEJORADO DE MATEMÁTICAS PARA LA ESCUELA SECUNDARIA (Cursos I, II, III, IV, V)

Curso I

| Capítulo | Título |
|---|---|
| 1 | Sistemas Numéricos Finitos |
| 2 | Conjuntos y Operaciones |
| 3 | Aplicaciones Matemáticas |
| 4 | Números Enteros y Suma |
| 5 | Probabilidad y Estadística |
| 6 | Números Enteros y Multiplicación |
| 7 | Retículos de Puntos en el Plano |
| 8 | Conjuntos y Relaciones |
| 9 | Transformaciones del Plano |
| 10 | Segmentos, Ángulos, Isometrías |
| 11 | Teoría Elemental del Número |
| 12 | Los Números Racionales |
| 13 | Algunas Aplicaciones de los Números Racionales |
| 14 | Algoritmos y sus Gráficas |



Curso II

| | |
|---|---|
| 1 | Lenguaje y Demostración Matemática |
| 2 | Grupos |
| 3 | Una Introducción Axiomática a la Geometría Afín |
| 4 | Cuerpos |
| 5 | El Sistema de los Números Reales |
| 6 | Geometría de las Coordenadas |
| 7 | Funciones Reales |
| 8 | Estadística Descriptiva |
| 9 | Transformaciones en el Plano: Isometrías |
| 10 | Longitud, Área y Volumen |
| Apéndice A | Masas Puntuales |

Curso III

| | |
|---|---|
| 1 | Introducción a las Matrices |
| 2 | Ecuaciones Lineales y Matrices |
| 3 | El Álgebra de las Matrices |
| 4 | Gráficas y Funciones |
| 5 | Combinatoria |
| 6 | Probabilidad |
| 7 | Funciones Racionales y Polinómicas |
| 8 | Funciones Circulares |
| 9 | Geometría del Espacio |

Curso IV

| | |
|---|---|
| 1 | Programación en Basic |
| 2 | Sucesiones, Series y Límites |
| 3 | Ecuaciones Cuadráticas y Números Complejos |
| 4 | Programación Lineal y Método Simple |
| 5 | Funciones Exponencial y Logarítmica |
| 6 | Probabilidades |
| 7 | Funciones Circulares |
| 8 | Espacios Vectoriales y Geometría Vectorial |

Curso V Provisional

| | |
|---|---|
| 1 | Introducción a la Continuidad |
| 2 | Más Sobre Continuidad |
| 3 | Límites |
| 4 | Aproximaciones Lineales y Derivación |
| 5 | Propiedades de la Derivación |
| 6 | Transformaciones Lineales |
| 7 | Aplicaciones de las Derivadas |
| 8 | Introducción a la Integración |
| 9 | Probabilidades |

# 6

## FORMACIÓN DE PROFESORES. ADOPCIÓN DE NUEVOS PLANES

La Primera Parte del sexagésimonoveno anuario de la Sociedad Nacional para el Estudio de la Educación (National Society for the Study of Education) dedicada a la Educación Matemática,* termina con la declaración siguiente:

"Para la enseñanza de las ciencias exactas, sin embargo, el problema apremiante del momento --no sólo por lo que respecta a la enseñanza secundaria, sino a la de todas las categorías desde el kindergarten hasta la de posdoctorado-- es preparar profesores en número suficiente".

Esta cita se refiere no sólo a la preparación que deben recibir los aspirantes al profesorado durante sus estudios universitarios, sino a la formación continua de los profesores en servicio, a fin de que se los pueda clasificar como "calificados".

### FORMACIÓN DE PROFESORES ANTES DE EJERCER



El problema de formar "profesores calificados en suficiente número" tiene alcance mundial y afecta tanto a los países menos industrializados, como a los más prósperos y cultos, y proviene de diversas causas internas. Es la primera de ellas el bajo salario que se paga a los profesores. Esto refleja la ya pasada de moda creencia que la enseñanza es un artículo de lujo, sin importancia para el ascenso económico. Hoy la educación contribuye en buena medida al progreso económico y al producto nacional bruto de cada país, al mismo tiempo que es esencial para el desenvolvimiento social y cultural de una sociedad democrática donde todos los ciudadanos cuentan y a ellos incumbe la decisión de los destinos del estado respectivo. Este hecho se reconoce ya en todo país ilustrado. Una segunda razón es la baja categoría social en que se tiene al maestro de escuela. Se lo considera un pedante que se limita a rutinizar al alumno mediante la repetición mecánica de lo ya conocido. Hoy, sin embargo, va cundiendo el reconocimiento de que el maestro es el encargado de la formación intelectual de la juventud, y como tal necesita una capacidad creadora e intelecto muy por encima de lo requerido en otros tiempos. De ahí que va adquiriendo un reconocimiento social creciente.

Una tercera razón de la escasez de profesores calificados es el poco adiestramiento que se les exige para obtener el certificado correspondiente. Hace cosa de un siglo, para ser maestro sólo se requería uno o dos años de estudios, una vez obtenido el diploma de educación secundaria.

(*) National Society for the Study of Education, 69th Yearbook, Part I. Mathematics Education, University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1970.

Esta preparación se ha incrementado gradualmente a cuatro o cinco años de estudio subsiguiente a dicho ciclo, y, por añadidura, en estos últimos veinte años se ha adoptado la idea de seguir cursos ocasionales mientras se ejerce la enseñanza. El aumento de competencia profesional ayudará a remediar la escasez de profesores calificados. Todavía otra razón de esta escasez es la demanda por la industria de personal competente en matemáticas y ciencias, al que ofrece salarios mejores que los que la enseñanza reporta. Los buenos candidatos para la enseñanza de las matemáticas se desvían hacia otras carreras de rango social más alto. Sin embargo, en fecha muy reciente (1970), parece que las necesidades industriales de Estados Unidos han sido copadas, por lo cual la carrera de profesor pasa a ser un nuevo foco de atracción de personal calificado.

La enseñanza de matemáticas de acuerdo con los nuevos planes y programas presenta al profesor demandas muy distintas de las que exigía la enseñanza tradicional. No sólo la orientación y contenido de las matamáticas en sí misma son distintos, sino que se requiere un enfoque completamente nuevo de la labor en clase en lo que atañe a pedagogía y psicología. Por otra parte, el creciente desarrollo de las matemáticas y de sus aplicaciones, en un plano avanzado, demandan un profesor que, a la vez, sea estudiante a lo largo de toda su vida profesional.

Qué dominio de las matemáticas ha de tener el profesor, qué conocimiento de la pedagogía y de la psicología teóricas y prácticas ha de poseer, y cómo ha de persistir en su perfeccionamiento en tanto enseña, son problemas que requieren solución si se pretende contar con personal calificado para la enseñanza. Un programa análogo al que se sigue en Alemania para profesores de gimnasio tendiente a solucionar estos problemas, resolvió el de la calidad, pero no el de la cantidad. La propuesta para formar profesores en Estados Unidos, formulada por el Comité sobre el Programa de Licenciatura de Matemáticas (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics), de la Asociación Norteamericana de Matemáticas, pareció ser bastante razonable, pero no tuvo la aceptación que se esperaba de parte de las autoridades habilitadas para la certificación de profesores, y como consecuencia éstos obtienen la licencia para ejercer la enseñanza con una preparación bastante inferior a la requerida por la mencionada propuesta.



Al considerar el grado de preparación en matemáticas que un profesor de enseñanza secundaria debe poseer, hay que tener presente en todo momento que esta preparación es necesaria, pero puede no ser suficiente. Para que sea suficiente es esencial que el profesor vea cómo todo este saber se relaciona con el contenido del plan de la escuela secundaria, y especialmente con el contenido del grado, o grados, en que él está enseñando o va a enseñar. Al considerar la preparación necesaria, no basta mencionar la asignatura, porque prácticamente todas ellas presentan aspectos y ramificaciones que llegan a las fronteras mismas de la investigación. Por ejemplo, "álgebra" puede significar la teoría del cálculo con cantidades (factoreo, operaciones, simplificación de expresiones, etc.) o la teoría de las ecuaciones (número de raíces, aislamiento de éstas, fórmulas, procedimientos iterativos, etc.) o álgebra abstracta (grupos, módulos, anillos, cuerpos) o álgebra lineal y espacios vectoriales, o categorías y functores, así como álgebras abstractas altamente especializadas (álgebra diferencial, álgebra de Lie, etc). Por lo tanto, hay que detallar bajo cada materia los temas que se hayan de estudiar.

Parece razonable esperar que el profesor de enseñanza secundaria haya alcanzado un dominio de cierta teoría o materia que le permita tratar cualquier otra de las que tenga que enseñar. Su preparación no puede limitarse a lo que tiene que enseñar, ni siquiera puede limitarse al dominio o conocimiento de la teoría de aquello que trata de transmitir a los alumnos: debe saber *más* de cuanto esté llamado a enseñar en el desempeño de su función. Esto le capacitará para prever las posibles aplicaciones que sus alumnos pueden hacer más adelante de lo aprendido en clase.

Echando una mirada a los programas enumerados en el capítulo 5, parecería que el contenido siguiente, mencionado en el programa de Düsseldorf, constituyese en su mayor parte el requerimiento mínimo para enseñar en una escuela secundaria. El Programa de Düsseldorf es un conjunto de cursos elaborados en Düsseldorf, Alemania, a comienzos de la década 1960-70, por los departamentos de matemáticas de universidades de Alemania, Francia e Italia, y considerado aceptable por todas ellas en el caso de transferencia de estudiantes. Todos los aspirantes a profesores de gimnasio en Alemania siguen este programa. La enumeración de los temas no se ajusta al orden en que se estudian.



## EL PROGRAMA DE DÜSSELDORF (PRIMER NIVEL)

### 1. Fundamentos de Álgebra

Conjuntos, subconjuntos producto de conjuntos, funciones. Conjuntos finitos y análisis combinatorio. Enteros, números racionales, números reales, números complejos. Relaciones definidas en conjuntos, relaciones de equivalencia, relaciones de orden.

Leyes de composición definida en un conjunto. Grupos, anillos, cuerpos (definiciones y algunos ejemplos, no una teoría general). Anillo de polinomios con coeficientes racionales en los dominios real y complejo. Fórmula binomial. División de polinomios de acuerdo con sus exponentes decrecientes. Máximo común divisor. Descomposición en fracciones racionales. El teorema fundamental del álgebra (no se requiere su demostración). Relación entre las raíces y los coeficientes de una ecuación polinómica.

### 2. Geometría Analítica y Geometría Diferencial Clásica de Dos y Tres Dimensiones

Ecuaciones de la recta, del plano, la circunferencia y la esfera. Problemas sobre ángulos y distancias en $R^2$ y $R^3$ Coordenadas polares en $R^2$. Estudio analítico de las cónicas. Ejemplos sobre cuádricas. Generación y representación de varias superficies. Algunas nociones sobre geometrías afín y proyectiva.

Propiedades generales de una curva plana definida por $y = f(x)$ o en representación paramétrica. Propiedades de una curva en un punto o en el infinito. Propiedades de una curva en $R^3$ en la vecindad de un punto, velocidad y aceleración en $R^3$, aceleración normal tangencial.

### 3. Álgebra Lineal (Primer Nivel)

Definición de espacios vectoriales, de subespacios, productos de espacios vectoriales, suma de espacios vectoriales. Independencia lineal, base de un espacio vectorial de dimensión finita. Transformaciones lineales, suma, producto, núcleo, imagen y rango.

Álgebra de matrices. Formas lineales, ecuaciones lineales.

Formas multilineales, determinantes. Autovalores y autovectores en un endomorfismo, ecuación característica. Reducción de una matriz a la forma diagonal en el caso de raíces distintas y forma triangular en el caso general. Formas bilineales simétricas y formas cuádricas; formas hermíticas. Espacios afines, paralelismo, vectores libres, centro de gravedad, conjuntos convexos.

Conceptos métricos en espacios vectoriales en $R^n$, norma, distancia, producto escalar y normas asociadas; desigualdad de Cauchy-Schwartz. Base ortonormal en $R^n$. Grupo de desplazamientos, grupo de rotaciones alrededor de un punto, ángulo de dos vectores, orientación de $R^n$, producto vector en $R^3$.



### 4. Números Reales, Funciones Continuas, Cálculo Diferencial Elemental

Se puede dar una construcción de un cuerpo de números reales o una definición axiomática. Subconjuntos del cuerpo de los números reales, cotas superiores, cotas inferiores. Intervalos, sucesiones acotadas, sucesiones convergentes. Teoremas sobre límites. Criterio de convergencia de Cauchy, teorema de Bolzano-Weierstrass.

Funciones de una variable real, límites, continuidad. Teoremas sobre funciones continuas (de valores reales) en un intervalo (valores intermedios, cotas, continuidad uniforme). Funciones monótonas, existencia de la inversa de una función continua y estrictamente monótona. Ejemplos de funciones discontinuas.

Derivadas, cálculo de derivadas. Las derivadas de una función compuesta, de una función inversa. Teorema de Rolle, teorema del valor medio. Máximo y mínimo de funciones de una variable real. Funciones trigonométricas directas e inversas de una variable real. Funciones exponenciales, funciones logarítmicas, funciones hiperbólicas directas e inversas.

Órdenes de infinitud. Desarrollos limitados, división de polinomios según sus exponentes crecientes. Funciones vectoriales de variable real. Continuidad, derivada y fórmula de Taylor. Funciones continuas de varias variables.

Funciones diferenciables en un punto. Derivadas parciales en un punto. Diferenciabilidad de una función con derivadas parciales continuas. Derivadas de una función compuesta. Interpretación geométrica: tangente y plano tangente. Cálculo de la derivada de funciones implícitas. Derivada parcial de orden superior. Ampliación de la fórmula de Taylor. Extremos de funciones de varias variables.

5. Cálculo Integral

Definición y propiedades de la integral definida de una función integrable en el sentido de Riemann; integrabilidad de funciones continuas, de funciones monótonas. Propiedades de la forma lineal definida por la integral. Relaciones entre la integral definida y la función primitiva. Ejemplos de funciones definidas por una integral.

Métodos de integración. Integración de fracciones racionales y funciones correspondientes. Integrales definidas de una función continua en un intervalo arbitrario (posiblemente infinito), convergencia, convergencia absoluta. Definición y propiedades elementales de la integral de Riemann-Stieltjes con respecto a una medida positiva sobre el eje real.

Longitud de una curva en representación paramétrica, la expresión de la longitud si esta representación es continuamente diferenciable. Integrales curvilíneas.

Conceptos elementales de integrales dobles y triples y de su cálculo. Reglas de cálculo de la diferenciación exterior, aplicación a integrales de superficie, a la fórmula de transformación de integrales múltiples (Stokes). (No se requiere la demostración, y este tema puede limitarse a la demostración de la fórmula de Riemann en el plano para un contorno sencillo).

Casos especiales: gradiente, divergencia, rotor.

6. Series

Series de términos reales o complejos; convergencia; criterio de Cauchy. Series de términos positivos: comparación, criterios clásicos de convergencia. Series de términos positivos decrecientes; comparación con una integral.

Series absolutamente convergentes. Series no absolutamente convergentes, series alternadas. Sucesiones y series de funciones, convergencia simple, convergencia uniforme.

Desarrollo en serie de las funciones $e^x$, sen $x$, cos $x$, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^a$, $\tan^{-1}x$, $\operatorname{sen}^{-1}x$.

Teoría elemental de las series de potencias de una variable real o compleja. Círculo de convergencia. Diferenciación, integración en el domino real. Definición y propiedades de $e^z$, sen $z$ y cos $z$, donde $z$ es un número complejo.

Conceptos fundamentales sobre series de Fourier, cálculo de coeficientes.

7. Ecuaciones Diferenciales

Conceptos fundamentales de ecuaciones diferenciales, trayectorias de un campo vectorial, problemas con condiciones iniciales, problemas con condiciones de contorno. Ejemplos de estos problemas mediante ecuaciones que pueden resolverse por integración; ecuaciones lineales de coeficientes constantes.

Superposición lineal de las soluciones de sistemas homogéneos de ecuaciones lineales de coeficientes variables. Ecuaciones no homogéneas.

8. Análisis Numérico

Sistemas de ecuaciones lineales, métodos de eliminación y el método de las aproximaciones sucesivas. Optimización lineal; aproximación en el sentido de Tchebycheff y Gauss. Algoritmos simples para el cálculo de los autovalores.

Polinomios y algoritmos de división, un ejemplo simple de algoritmo. Cotas superiores mínimas y cálculo de las raíces, aproximación de Newton, métodos de iteración, el método Runge-Kutta para los problemas de valores iniciales. Métodos de diferencias para resolver problemas con condiciones de contorno. Ejercicios prácticos con computadoras electrónicas.



9. Cinemática y Dinámica

Equivalencia de sistemas vectoriales, momentos.

Cinemática. Definición de movimiento con respecto a un sistema de referencia. Cinemática de un punto. Ejemplos sencillos para la determinación de movimientos, a partir de condiciones iniciales (móvil sometido a una aceleración central). Campo de velocidades de un cuerpo sólido. Transformación de sistemas de referencia, suma de velocidades y de aceleraciones.

Dinámica. Masa de un sistema. Conservación de la masa. Centro de gravedad. Momento del impulso lineal. Momento de la aceleración. Energía cinética. Cuerpos sólidos. Tensor de inercia. Ejemplos sencillos de movimiento de sólidos.

10. Introducción al Cálculo de Probabilidades

Los axiomas del cálculo de probabilidades. Algunas distribuciones unidimensionales: binomial, de Poisson y normal. Esperanza matemática de una función, generación de funciones. Leyes de la probabilidad bidimensional.

Método de los cuadrados mínimos, correlación, regresión.

Estos diez cursos fueron concebidos como un programa de matemáticas de dos años de duración para universidades europeas, pero, en realidad, los estudiantes requieren tres o más años para cumplirlo y aprobarlo con calificaciones satisfactorias. No obstante, este plan es deficiente en algunos respectos. La aritmética y el álgebra del (1) es menos avanzada que la propuesta para los programas de estudios secundarios, y necesita un suplemento axiomático de teoría de conjuntos, como introducción a los sistemas numéricos y a las estructuras algebraicas. Por lo que se refiere a la geometría, el plan parece satisfactorio. El análisis va más allá de lo que necesita un profesor de los primeros años de escuela secundaria, y en consecuencia, ciertos aspectos del cálculo integral, series y ecuaciones diferenciales podrían ser eliminados del plan correspondiente a la preparación de profesores del nivel mencionado. El contenido de análisis numérico responde a las necesidades de formación de profesores del primer y segundo ciclo de la escuela secundaria. También, hay que notar que es deficiente en lo que atañe a probabilidades, en primer lugar porque se omite la mención de la estadística, y en segundo, porque no abarca aspectos de la teoría de probabilidades propuestos para su enseñanza en la escuela secundaria. Debe ser reforzado con temas sobre variables estocásticas, números al azar, ley de los grandes números y problemas sobre inferencia estadística e intervalos de confianza.

El programa de Düsseldorf ofrece también el bosquejo de un segundo nivel de enseñanza de dos años adicionales, que pueden estudiar quienes deseen enseñar el ciclo superior de la escuela secundaria. Pero aquí también la mayoría de los profesores europeos con aspiraciones estudian por lo menos tres años para completar este segundo programa. Si bien cada uno de los temas principales están explicados al detalle en el informe original, aquí se presenta tan sólo una lista de los títulos con un breve comentario.



### SEGUNDO NIVEL (MATEMÁTICAS PURAS)

11. Álgebra de Conjuntos y Álgebra

Un desarrollo teórico del número y de las estructuras algebraicas a partir de conjuntos.

12. Álgebra Lineal (Segundo Nivel)

Una revisión y ampliación a problemas especiales del álgebra lineal del nivel precedente.

13. Topología General

Una introducción a la topología algebraica, convexidad, espacios compactos, conexos y métricos.

14. Espacios Funcionales

Espacios vectoriales normados, espacios de Banach, teorema de Stone-Weierstrass.

15. Integración (Segundo Nivel)

Integral de Lebesgue en $R^n$, cambio de variables, series.

16. Cálculo Diferencial

Funciones implícitas, continuidad, formas diferenciales; ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

17. Funciones Analíticas de una Variable Compleja

Series de potencias, integral de Cauchy, funciones definidas por series, superficies de Riemann.

18. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies en $R^3$

Curvatura normal, geodésica, torsión, curvatura total.

19. Conceptos Elementales

Teoría de números, ampliación del concepto de número, geometría de $R^2$ y $R^3$, modelos euclidianos de geometrías no euclidianas, axiomatización.

Este programa se asemeja bastante al propuesto por H. Renato Volker y Luis A. Santaló.* En él se acentúa en exceso el análisis. En todos los demás aspectos, si se exceptúan la geometría y las probabilidades, el programa parece ser por entero suficiente para preparar al profesorado encargado de enseñar los fundamentos de la materia. En cuanto a geometría, debiera suplementarse con un estudio más detallado de la geometría afín, de la geometría analítica y elementos de geometría proyectiva. Lo dedicado a la teoría de probabilidades tiene que ser ampliado en gran medida a fin de abarcar un curso bien redondeado sobre axiomática de las probabilidades matemáticas e inferencia estadística.



Carece el programa de toda mención sobre aplicaciones a la biología, a la economía o a las ciencias del comportamiento. Por cierto que tales aplicaciones, juntamente con cierto estudio de estas mismas ciencias, deben constituir una faceta de la preparación básica de todo profesor de matemáticas en el futuro. Una nota más de precaución es conveniente aquí. Se debe distinguir entre la exposición de los conocimientos que el profesor debe poseer y la manera en que dicho conocimiento es transmitido. Demasiados profesores universitarios se contentan con exponer correcta y fríamente sus materias sin correlacionar su enseñanza con la de los programas de las escuelas secundarias de modo que muchos de los objetivos de ésta pasan desapercibidos por los estudiantes. La manera de aprender los estudiantes una materia merece un examen tan atento como lo que van a aprender más tarde en la universidad.

Para destacar este último punto, sería conveniente añadir una nueva sección 20 al plan de Düsseldorf en la que se revisase por entero el plan de estudios de secundaria desde un plano avanzado con respecto a la totalidad de los 19 temas estudiados en la universidad. Este punto lo puso de relieve Felix Klein, o sea que, antes de dedicarse a la enseñanza,

---

(*) La Enseñanza de las Matemáticas en las Américas, II. Lima, Perú, 1966, Teachers College Press, Nueva York, N. Y.

o al comenzar ésta, debieran estudiarse desde un punto de vista más avanzado las matemáticas elementales (las que se enseñan en los centros secundarios). Al mismo tiempo debieran estudiarse los principios tanto pedagógicos como psicológicos del aprendizaje de las materias, a fin de ofrecer al profesor un cuadro de conjunto de la didáctica de las matemáticas.

Es fácil convertir este plan de dos niveles en otro de tres: (1) para la enseñanza del primer ciclo de secundaria, o sea grados siete, ocho y nueve, (2) para la enseñanza del ciclo superior de la escuela secundaria, grados diez, once y doce, y (3) para la enseñanza de las clases sobresalientes del ciclo superior de la escuela secundaria y los primeros años de enseñanza pos-secundaria. Los profesores pueden entonces enseñar el primer ciclo de secundaria y continuar con el estudio del nivel 2 del plan a fin de enseñar las clases más avanzadas de matemáticas. Este procedimiento también permite a las personas que, en una etapa posterior de su vida profesional, adquieren un interés genuino por la enseñanza de las matemáticas, pasar a una enseñanza superior de la materia.

La práctica pedagógica de enseñanza de las matemáticas previa al ejercicio regular en un centro de enseñanza, constituye una fase importante de la carrera subsiguiente de un profesor. Nunca se llegó a un acuerdo general sobre cuándo deben llevarse a cabo tales prácticas: bien durante los estudios de graduación, en un curso de posgrado o bien durante una especie de internado. Según otro punto de vista distinto, ampliamente aceptado hoy, estas prácticas de didáctica matemática deben ponerse en manos de un educador matemático que tenga experiencia en la enseñanza en centros de segunda enseñanza y conozca las dificultades inherentes al aprendizaje de estas asignaturas. Este aprendizaje tiene una psicología y una filosofía intrínsecas y por lo tanto los puntos de vista pedagógicos sobre su enseñanza han de estar referidos directamente a las matemáticas que el estudiante en período de prácticas enseñará después, así como a la capacidad intelectual o cognoscitiva y afectiva correspondiente a la edad de los estudiantes objeto de su enseñanza.



A medida que se desenvuelve la psicología del aprendizaje y revela nuevos matices de las operaciones mentales, puede resultar necesario modificar los métodos de enseñanza vigentes. La psicología que el futuro profesor estudie es la de la adolescencia (de la edad de 12 a 18 años), la del aprendizaje intelectivo y la que atañe a diferencias de personalidad. Nuestro propósito debe ser elevar el alfabetismo y competencia matemática de la *totalidad de la población,* y esto significa el aprovechamiento inteligente y adecuado de todo lo que se conoce respecto a la psicología del aprendizaje que parezca oportuno en cada caso.

En resumen, es evidente que la preparación previa del aspirante a profesor de matemáticas ha de tener dos enfoques fundamentales: el de la pedagogía y el de las matemáticas *per se.* Este segundo deberá proporcionar un conocimiento de la materia bastante más profundo de lo que el profesor haya de enseñar. Esto implica un dominio de los fundamentos de las matemáticas actuales, juntamente con el conocimiento de las diversas aplicaciones de las partes más elementales de estas ciencias. El contenido pedagógico debe estar íntimamente relacionado con la materia de enseñanza y con el desenvolvimiento psicológico de la juventud a la que se enseña. Más importante aún es que la preparación en estos dos aspectos esté condicionada de manera que el futuro profesor prosiga su propio perfeccionamiento docente a lo largo de toda su vida profesional, y que, de este modo, pueda ajustar su labor pedagógica a las cambiantes circunstancias que, sin duda, se le presentarán mientras ejerza.

## ACTUALIZACIÓN DEL PROFESORADO EN EJERCICIO

La expansión casi explosiva de la investigación matemática y sus intensos efectos en los planes de estudios de la enseñanza secundaria han traído consigo una crisis pedagógica para aquellos abnegados profesores que iniciaron la docencia hace quince o más años. El programa de enseñanza secundaria era entonces el tradicional, donde se destacaban sobre todo la geometría de la congruencia del triángulo, de acuerdo con la geometría euclidiana o sintética (para ellos la única geometría), el álgebra operacional y la trigonometría relativa a la resolución de triángulos. Seguía luego el programa del "college" tradicional, con el análisis, la teoría de las ecuaciones, geometría euclidiana moderna, etc., que los dejaba sin una idea de la geometría de otros espacios, del álgebra de las estructuras, de los espacios vectoriales, de las aplicaciones de la lógica, de las probabilidades y de la estadística matemática, y de la unidad fundamental que confieren a las matemáticas los conceptos de

conjunto, de relaciones, correspondencias o funciones y operaciones.

Se ha intentado en varios países hacer volver a estos profesores a la universidad, o a seminarios especiales, donde puedan aprender estos nuevos aspectos de las matemáticas, bien mediante cursos breves o bien mediante cursos de verano y cursos anuales regulares. Tales cursos han representado una ardua tarea para muchos de ellos porque la índole abstracta de los temas enseñados y el nuevo campo de sus aplicaciones eran ajenos por completo a todos sus estudios matemáticos previos. Además, si bien pudieron aprender algo del nuevo espíritu del enfoque moderno de las matemáticas, ello no bastó para encaminarlos al autoperfeccionamiento y al estudio de estas materias, así como a la pedagogía adecuada al estudio de las matemáticas como un todo unificado. De hecho quedan con la impresión de que lo nuevo es ahora lo permanente en los años venideros y que no cabe esperar otros cambios, cuando la simple idea de permanencia, en lo que a la enseñanza se refiere, debe ser descartada. El cambio es inevitable.

Hay varias maneras de hacer que los profesores en ejercicio puedan incorporarse al proceso de continuo perfeccionamiento de su capacitación pedagógica. Si estos profesores han estudiado previamente matemáticas con interés y provecho, bien fuesen de tipo tradicional o no lo fuesen, tendrán la base intelectual necesaria para renovar y poner al día por sí solos su capacitación profesional y para proseguir el aprendizaje de la materia que enseñan. Sin embargo, es necesario preparar material de estudio apropiado para esta gran masa de profesores en ejercicio. Con este objeto se necesita una clase especial de libros de texto: que contengan innovaciones tanto en temas como en metodología.

Estos textos deben ser escritos por matemáticos conscientes a la vez de la necesidad y de las limitaciones de los profesores de matemáticas de las escuelas secundarias. Tales matemáticos (Polya, Toeplitz, Courant, Klein, Stein, etc.) los hubo antes de ahora y ciertamente los debe haber entre nosotros.

Otro medio de promover la preparación y superación continuas del profesorado de matemáticas son las sociedades profesionales, cuyos miembros son, sobre todo, profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. Estas agrupaciones actúan sobre sus miembros y sobre su respectiva labor pedagógica de dos maneras: con sus convenciones regulares y con sus publicaciones, en especial las periódicas. En ambos casos, ya sea mediante conferencias o artículos, los matemáticos y otros educadores ofrecen a sus colegas los resultados más recientes de sus estudios e investigaciones. Un ejemplo de este tipo de presentación lo ofrece el profesor R. Apery, de la Universidad de Caen, Francia, en el Boletín de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Instrucción Pública Francesa, con un artículo intitulado *Categorías.** En él brinda a sus lectores la oportunidad de entrar en contacto con uno de los últimos desarrollos en álgebra.

Tal vez el medio más eficaz de conseguir un profesorado alerta a los últimos avances sea el estimular su retorno periódico a una universidad que cuente con un instituto o departamento especial de enseñanza matemática, una parte de cuyo plan de estudios esté dedicada de un modo estricto a la continua renovación de profesores en ejercicio. Este retorno no ha de entenderse como un año sabático, sino como una faceta necesaria de la actividad profesional, sin pérdida de salario ni pago de honorarios. Un buen ejemplo de esta manera de entender la renovación del profesorado es el programa del Colegio Real de Educación, de Dinamarca, en Copenhague.**



Una investigación del estado de cosas a este respecto en casi todas las escuelas secundarias de todos los países destaca estos tres puntos principales:

(1) En el futuro los profesores se verán en la necesidad de enseñar temas que no estudiaron durante sus estudios universitarios.

(2) La aprobación de los cursos universitarios y de los exámenes previos al nombramiento, no pueden aceptarse ya como la última etapa de la preparación para una carrera vitalicia de enseñanza matemática.

(3) Los medios para realizar esta labor de perfeccionamiento y renovación del profesorado en ejercicio deben ser más variados y puestos en uso con un espíritu distinto al de la formación de profesores antes de ingresar a la enseñanza.

---

* En los números 263 y 264 de dicho Boletín.

** Puede obtenerse del Departamento de Matemáticas de este Colegio un boletín en que se detalla este programa.

En relación con el primer punto, temas nuevos, tales como las relaciones, las estructuras, los espacios vectoriales, simetrías, programación lineal, etc., hoy día contenidos en los programas de elaboración reciente de la enseñanza secundaria, han sorprendido sin la necesaria preparación a la mayoría de los profesores en ejercicio, y en consecuencia éstos resisten el cambio que ello supone. Sin embargo, cuando los profesores han tenido ocasión de familiarizarse con estos temas, han disfrutado la enseñanza de los nuevos programas. Hay un elemento dinámico en el aprendizaje de las nuevas matemáticas que lleva a un enfoque, dinámico también, de enseñarlas.

Respecto del segundo punto, hay que advertir que, al igual que en cualquier otra profesión, es necesario en primer lugar establecer ciertos requerimientos que han de cumplirse antes de asumir el puesto de profesor. Sin embargo, una vez que uno es admitido a una profesión, se presupone que el nuevo miembro asume la responsabilidad de procurar, de la mejor manera posible, estar bien informado y al día de cuanto atañe a la materia que enseña. Como estudiante, tiene que demostrar su competencia y valía, pero como profesor en ejercicio, es un igual entre sus colegas, y puede tanto hacer aportaciones como beneficiarse de las ajenas.

Sobre el tercer punto hay que observar que las maneras de aprender son tantas que tal vez sea más fácil indicar cuáles deben evitarse. Pueden hacerse dos comentarios, y es el primero que la preparación del profesor en ejercicio no se debe planear ni establecer oficialmente; o sea que no ha de ajustarse a un plan de estudios que todos los profesores hayan de seguir. Es el segundo que si la preparación del profesor toma la forma de estudios universitarios para la obtención de certificados de posgrado, entonces tales estudios deben hacerse de acuerdo y con la orientación del departamento de matemáticas, y no bajo la iniciativa y autoridad del departamento general de pedagogía. Los profesores de matemáticas están al tanto de las tendencias de las materias que enseñan, aspecto este esencial, así como saben qué temas son de poco o ningún valor para la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de segunda enseñanza. Si bien es cierto que en la última década algunos educadores en general y ciertos psicólogos se han interesado de veras por asuntos científicos ajenos a su especialidad y por la enseñanza de las matemáticas, es dudoso que sepan ya lo bastante de estas materias para que se los pueda equiparar con un matemático interesado a fondo en esta especialidad pedagógica.



## ADOPCIÓN DE PROGRAMAS NUEVOS

Por muy bien que se diseñen nuevos planes de estudios de las matemáticas, que se pongan a prueba y resulten apropiados para su enseñanza; por muy bien que se hayan capacitado los profesores antes y después de empezar a ejercer la profesión para enseñar tales planes, todo resultará en vano si no se los adopta en las escuelas. En tiempos pasados, la innovación de contenido y los cambios en las metas educacionales han tenido lugar lentamente y sólo tras vencer gran resistencia de las viejas y bien atrincheradas prácticas y rutinas. Urge en estos momentos el apresurar la aceptación de nuevos programas de matemáticas a fin de que los estudiantes de hoy estén debidamente preparados para hacer frente a las necesidades del mañana al asumir las responsabilidades inherentes a su condición de adultos.

Ya hemos discutido dos factores imprescindibles para el éxito de toda innovación. Éstos son, primero, un nuevo plan de estudios apoyado por nuevos libros de texto previamente probados y evaluados a lo largo de varios años de su ensayo en clases-piloto; segundo, un cuerpo de profesores capacitados, competentes tanto en lo que atañe al contenido de los programas como a la pedagogía --métodos didácticos, teoría general del aprendizaje y psicología juvenil o de la adolescencia-- requerida para el desempeño eficiente de sus tareas docentes. Hay otros factores implícitos en la práctica de la educación en general que obstaculizan las innovaciones de esta índole. Es uno de ellos el rígido sistema de examen con arreglo al cual las preguntas se preparan, administran y computan a tono con el inconmovible y viejo plan de estudios. Otro, el de la administración educativa general y el público ante el cual es responsable. Este público, como es natural, está en guardia ante los posibles efectos que lo "nuevo" puede ejercer en los niños expuestos a su influjo. Veamos algunos de los medios de eliminar estos obstáculos al cambio.

Las juntas o cuerpos examinadores, con largos años de experiencia a su favor, seguridad e instrumentos de acreditada veracidad en la evaluación de los resultados de un plan de estudios establecido hace tiempo, tienen muchas razones para pronunciarse en favor del *status quo*. Si algún cambio se hace, estos cuerpos desearán ajustar el material y recursos de prueba establecidos a procedimientos lentos, pasito a paso, por un largo plazo de tiempo. Ahora bien, los planes de estudios experimentales drásticos no se prestan a ser evaluados por los métodos empleados hasta ahora, porque sus objetivos, gran parte de su contenido y sus aplicaciones son por completo distintos. El solo método razonable y equitativo requiere la elaboración de nuevos exámenes que se ajusten a los fines y contenido del nuevo plan de estudios. Es asunto fácil utilizar los viejos tests para ver cómo los estudiantes, enseñados de acuerdo con el nuevo plan, se las manejan con el antiguo, pero este proceder es de escaso valor por la sencilla razón de que el plan nuevo induce una conducta intelectiva que niega muchas de las metas tradicionales. Así el primer paso con respecto a las pruebas es familiarizar a las universidades y cuerpos examinadores con el nuevo plan de estudios y con los resultados que de él se esperan. Es justo pedirles que sus cuestionarios de exámenes evalúen lo enseñado a los estudiantes y lo que se esperó que aprendiesen, no que pongan a prueba un programa convencional vigente.

Toda estructuración científica de un plan de estudios nuevo va acompañada de una evaluación de sus resultados. Las pruebas correspondientes a estos programas, juntamente con cierta taxonomía o clasificación de los objetivos del plan, pueden servir de base para formular un mecanismo que reemplace los exámenes establecidos. Este mecanismo puede a su vez servir de base para que el cuerpo examinador regular, bien elabore sus propias pruebas para el futuro, o bien reemplace el viejo sistema de examen, caso de que el nuevo plan sea aprobado por un suficiente número de escuelas. La gran diferencia entre el moderno plan unificado de los estudios y el plan tradicional, como se vio en los capítulos 2 y 6, no permite ni un cambio gradual, ni hacer unos exámenes que evalúen los resultados de ambos. *Todo plan de enseñanza nuevo exige un nuevo sistema de examen.*

Finalmente, es algo esencial que los ciudadanos en general, legos en estas materias, sean informados convenientemente de lo que está en juego, si se quiere que el nuevo plan gane su aprobación y tenga eficacia en las escuelas a que se destina. Significa esto que el coordinador general del plan que no está al corriente del pensamiento matemático actual, el director de las escuelas a quien compete la responsabilidad de lo que pasa o puede pasar a los alumnos a su cuidado, los padres, a quienes concierne el futuro de sus hijos, y hasta el industrial y el gerente de un negocio en general que, con el correr del tiempo, ofrezca trabajo a estos estudiantes, deben todos ellos saber: *por qué* las matemáticas han de ser enseñadas de una manera nueva en las escuelas secundarias; *qué* nuevo contenido y organización del mismo se propone; y *quién* ha de estudiar estas matemáticas, algunos de los alumnos o todos ellos. Algunas respuestas a estas interrogantes se hallan en la monografía "La Revolución en las Matemáticas Escolares, Primera Fase", que ésta suplementa. Durante la década pasada, salieron a relucir respuestas todavía más ásperas que éstas en pro de un enfoque unificado, con conceptos y estructuras modernos.



¿Por qué la necesidad de un plan nuevo de estudio de las matemáticas? Simplemente porque *las matemáticas son ciencias vivas y están creciendo* El acopio nuevo de matemáticas que se incorporó al núcleo tradicional durante los últimos sesenta años asciende a más de cuanto de estas ciencias se ha descubierto desde el origen de la especie humana hasta finales del siglo XIX. Además de esto, una gran parte de estas recientes conquistas matemáticas han llegado a ser ya instrumentos de progreso científico y técnico. La aplicación de los vectores y espacios vectoriales son tan necesarios para llevar a cabo empeños científicos como las cifras arábigas lo son en la vida social y en los negocios. Y con todo, la adopción de los primeros ha encontrado una obstinada resistencia y en estos momentos está esforzándose por su admisión en el plan de estudios de las escuelas secundarias.

La computadora digital entró en escena a comienzos de la década 1950-60. El perfeccionamiento y la aplicación de esta computadora por programadores, investigadores científicos y creadores de equipo de la misma índole, ocupaban en 1950 alrededor de 1 000 personas, todas las cuales necesitaban estar versadas en análisis numérico, así como en los preliminares del cálculo diferencial e integral. Dicho número de personas se *duplicó* anualmente por diez años consecutivos, de modo, que, en 1960, su número ascendía a $1\ 000 \times 2^{10}$, o sea más de 1 000 000 de trabajadores.

Hoy día, 1970, este equipo viene penetrando en todos los aspectos de la vida, incluso en los proyectos del aprendizaje educativo, y emplea directamente a más de 3 000 000 de personas. Indirectamente, cualquiera que sean los fines a que se aplique este equipo, repercute en los requerimentos matemáticos de más de 10 000 000 de empleados.

Según estudios recientes de las necesidades de mano de obra, llevados a cabo por la OECD en países más avanzados, para 1975 la economía sólo necesitará la cuarta parte de obreros no especializados que requería en 1910, es decir, por cada 80 empleados en 1910 empleará sólo 20, y en cambio, la economía aludida necesitará 80 expertos que se hayan graduado de segunda enseñanza, en aspectos técnicos de matemáticas y ciencias, en vez de los 20 necesarios antes de la segunda guerra mundial. Más significativo es que, hace cosa de 50 años, sólo una persona de cada 100 necesitaba conocer matemáticas hasta el plano del análisis, en tanto que, dentro de cinco años, o sea en 1975, deben poseer esta preparación el 32 por ciento de los adultos. Las matemáticas contemporáneas tienen aplicaciones en muchos dominios de la física teórica, sin duda, pero la tienen también en la tecnología de las computadoras, en la investigación de operaciones, gerencia de negocios, sociología, antropología, psicología, lingüística, comunicaciones, transporte, medicina (diagnosis), economía, ingeniería, y así sucesivamente. En todos estos campos, las matemáticas contemporáneas vienen permitiendo a los investigadores enmarcar sus preguntas y problemas en términos matemáticos, preguntas muchas de ellas que han desconcertado y soslayado todos los demás enfoques e intentos de resolverlas en el pasado.

El *qué* de las nuevas matemáticas ha sido expuesto de lleno en los capítulos del 2 al 5 inclusive ¿Quién debe estudiar las matemáticas nuevas --esto es-- son para *todos* o para *algunos* estudiantes? La respuesta sencilla es: "Son para todos". ¿Por qué? Los niños ya no dejan la escuela al terminar el octavo grado, ni siquiera el décimo. Aun cuando hay algunos estudiantes que no sienten el deseo de proseguir las tareas escolares, en Estados Unidos, la mayoría de ellos permanecen en la escuela hasta graduarse de la escuela secundaria. Ya no es necesario enseñar a los alumnos del primer ciclo de secundaria el machaqueo práctico del cálculo, álgebra y geometría del espacio para que estén en condiciones de incorporarse a la vida de cada día a una edad más temprana. Es más, la mayoría de las medidas físicas y la aritmética comercial que se le enseñaron en dichos grados hace algún tiempo, son cosas pasadas de moda hoy y aun si se les enseñara nuevas habilidades o conocimientos también éstos serían inútiles cuando los niños entraran en el mundo de los adultos. Por lo tanto, el desenvolvimiento o formación mental o intelectual es la importante contribución que pueden hacer las matemáticas en estos años de estudio común a todos los niños.



¿Cómo adquirirán esto los niños? Mediante un nuevo tipo de pedagogía que llamaremos dinámica. Por mucho tiempo, la enseñanza de las matemáticas ha sido la más difícil de todas las materias. Nosotros, los profesores, con las mejores intenciones y la mejor conciencia del mundo, hemos deseado llevar a nuestros alumnos, con la mayor rapidez posible, por las buenas o por las malas, al aprendizaje de la esfera perfecta de las verdades matemáticas. De vez en cuando uno de tales estudiantes llegaba a la meta, pero lo hacía por pura coincidencia. Hoy reconocemos que la sabiduría matemática no es un don de los dioses --*a priori*--, sino una creación del hombre. Pero es inútil presentar la materia como una construcción rigurosamente axiomática surgida de una mente poderosa. Ahora permitimos a nuestros alumnos aprender, mediante experiencia propia, aislando, reconociendo y construyendo por sí mismos los conceptos y estructuras de las matemáticas modernas.

A fin de aprender matemáticas de una manera dinámica, lo mejor es presentar al estudiante una situación que se quiere reducir a términos o esquemas matemáticos. Al comienzo la situación debe ser fácil, interesante y problemática. Entonces, con nuestra orientación, aprenden a esquematizarla, a desenredar sus elementos, a definir y construir una estructura, a demostrar y aplicar por sí mismos, más bien que a mantenerse pasivos y escuchar y memorizar resultados ya digeridos o elaborados. De esta manera el estudiante de hoy no halla las matemáticas tan áridas, tan descarnadas y remotas del mundo de su experiencia, y aplica lo aprendido con discernimiento.

En resumen, tiene que haber nuevos planes y programas de matemáticas porque éstas forman un cuerpo de doctrina de aplicaciones siempre crecientes; porque las matemáticas tienen efectos valiosísimos en el descubrimiento de nuevas verdades en el dominio de otras ciencias; porque la sociedad de hoy, técnica y científica, requiere cada vez más personas competentes en matemáticas, y porque la expansión explosiva del saber exige una reconstrucción de las matemáticas con arreglo a una estructura unificada. Esta nueva organización de las matemáticas, una conquista de mediados del siglo XX, tiene por base conjuntos, relaciones y correspondencias, a partir de los cuales se construyen estructuras geométricas y algebraicas, todas las cuales tienen,

además de importancia teórica, valiosísimas aplicaciones en otros campos de investigación. Esta nueva matemática se considera una manera de pensar que, a su vez, abarca un modo de pensamiento aplicable a situaciones probabilísticas e inferenciales. Otorgan al intelecto un desenvolvimiento importante y valioso para *todos* los estudiantes, y no sólo a los mejores de ellos. Finalmente, puede ser aprendida porque se la ha de enseñar por métodos activos, dinámicos, que movilizan las mentes estudiantiles a elaborar sus propios conceptos y estructuras matemáticas, en vez de forzarlos a memorizar y recitar lo que otros elaboraron y pulieron antes.

Si se quiere que nuestros niños no sean anacrónicos en el momento en que se aproximen a la edad adulta de la creación y responsabilidad, hemos de educarlos hoy de manera que estén al día mañana. Tal es la meta de la revolución en la enseñanza de las matemáticas.

## BIBLIOGRAFÍA


(1) ADAMS, W., GEWIRTZ, A. y QUINTAS, L. Elements of Linear Programming, Van Nostrand, Princeton, N. Y. (1969).

(2) ALBERT, A. A. (ed.). Studies in Modern Algebra (MAA Studies in Mathematics, II). Prentice Hall, Nueva York (1963).

(3) ALEKSANDROV, A. D., KOLMOGOROV, A. N. y LAVRENT'EV, M. A. (ed.). Mathematics--Its Content, Methods, and Meaning, Vols. I, II, III, The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts (1963).

(4) ARTIN, E. "Le Points de Vue extrêmes sur l'Enseignement de la Géométrie", *L'Enseignement Mathématique,* II$^{e}$ series, Tomo IX, 1-4 (1963).

(5) BIRKHOFF, G. y MACLANE, S. A Survey of Modern Algebra, 3ª ed., MacMillan, Nueva York (1965).





(6) BOURBAKI, N. Elements of Mathematics, 33 Vols., Hermann et Cie, París.

(7) CARTAN, H. "Réflections sur les Rapports d'Aarhus et Dubrovnik", *L'Enseignement Mathématique,* II$^{e}$ series, Tomo IX, 84-90 (1963).

(8) Charte de Chambery. L'Apmep, 29 rue d'Ulm, París 5$^{e}$. (1968).

(9) CHRESTENSON, H. E. Mappings of the Plane, Freeman, San Francisco (1965).

(10) DAVIS, P. The Mathematics of Matrices, Blaisdell, Nueva York (1965).

(11) Engineering Concepts Curriculum Project. The Man-Made World, 3 Vols., McGraw-Hill, Nueva York (1970).

(12) FEHR, H. F. (ed.). Mathematics Today-A Guide for Teachers, Organization for Economic Co-Operation and Development, París (1964).

(13) FREUDENTHAL, H. "Geometry Between the Devil and the Deep Blue Sea", CSMP, Carbondale, Illinois (1970).

(14) Report of the Cambridge (U.S.A.) Conference on School Mathematics, Goals for School Mathematics, Houghton-Mifflin, Boston (1963).

(15) HERSTEIN, I. N. Topics in Algebra, Blaisdell, Nueva York (1964).

(16) HULL, T. E. Introduction to Computing, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey (1966).

(17) International Study of Achievement in Mathematics, 2 Vols., Wiley, Nueva York (1967).

(18) JEGER, M. Transformation Geometry, Wiley, Nueva York (1966).

(19) KEMENY, J. y colaboradores. Finite Mathematics with Business Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey (1962).

(20) KUTOSOV, B. V. Geometry, SMSG Studies in Mathematics, Vol. IV, University of Chicago Press, Chicago, Illinois (1960).

(21) Lectures on Modern Teaching of Geometry, Mathematisk Institut, Aarhus University, Dinamarca (1965).

(22) MME Mathematics Textbooks, revised parts A and B, Haraps, Londres (1968).

(23) Mathematics Project for the Arab States, The Cairo Regional Seminar, UNESCO, París (1969).



(24) MENGER, K. "The Geometry Relevant to Modern Education", CSMP, Carbondale, Illinois (1970).

(25) MODENOV, P. S. y PARKHOMONKO, A. A. Geometric Transformations, Vol. I, Academic Press, Nueva York (1965).

(26) National Society for the Study of Education. Mathematics Education, Sixtyninth Yearbook, Part I, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois (1970).

(27) New School Mathematics in Nordic Countries, Final Report of the Nordic Committee for the Modernization of School Mathematics, Department of Education, Estocolmo, Suecia (1967).

(28) New Thinking in School Mathematics, Organization for Economic Co-Operation and Development, París (1961).

(29) New Trends in Mathematics Teaching, Vol. I, UNESCO, París (1966).

(30) New Trends in Mathematics Teaching, Vol. II, UNESCO, París (1970).

(31) PAPY, G. Mathématique moderne, Vols. I, II, Versión Inglesa: Collier-MacMillan, Londres. Versión Española: Eudeba, Buenos Aires.

(32) Proceedings of the First International Congress on Mathematical Education, Reidal Publishing Co., Holanda (1970).

(33) RÅDE, L. (ed.). The Teaching of Probability and Statistics, Wiley, Nueva York (1970).

(34) Recommendations for the Training of Teachers of Mathematics, Course Guides for the Training of Teachers of Junior High and Senior High School Mathematics, The Committee on the Undergraduate Program in Mathematics, Mathematical Association of America, Berkeley, California (1962).

(35) REDEI, L. Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometries According to F. Klein, Pergamon Press, Nueva York (1968).

(36) REVUS, A. "The Position of Geometry in Mathematical Education", CSMP, Carbondale, Illinois (1970).

(37) School Mathematics in Arab Countries, Grade 10 Mathematics, UNESCO, París (1970).

(38) School Mathematics Project, Book I-IV, Cambridge University Press, Cambridge, Londres (1967).

(39) Second Inter-American Conference on Mathematical Education, Lima, Perú, Teachers College Press, Nueva York (1967).

(40) Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study (SSMCIS), United Modern Mathematics, Courses I, II and III, Teachers College Press, Nueva York (1969-70).



(41) STONE, M. "Learning and Teaching Axiomatic Geometry", CSMP, Carbondale, Illinois (1970).

(42) Synopses for a Modern Program in School Mathematics, Report of the Dubrovnik Group. Organization for Economic Co-Operation and Development, París (1961).

(43) The Düsseldorf Program, Students' European Academic Record Booklet, University of Münster, Westfahlen, Alemania (1962).

(44) The Revolution in School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C. (1960).

(45) TULLER, A. A Modern Introduction to Geometries, Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey (1967).

(46) JAGLOM, I.S. Geometric Transformations, II, New Mathematical Library, 21 Vols, L.W. Singer, Nueva York (1969).

# COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS CIENTÍFICAS

Publicadas

## Serie de matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América.
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Álgebra Lineal, por Orlando Villamayor.
N° 6. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
N° 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
N° 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.
N° 11. Probabilidad e Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
N° 12. Estructuras Algebraicas, II, por Enzo R. Gentile.
N° 13. La Revolución en las Matemáticas Escolares (Segunda Fase), por Howard F. Fehr, John Camp y Howard Kellogg.



## Serie de física

N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.
N° 6. Semiconductores, por George Bemski.
N° 7. Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
N° 8. Física Cuántica, por Onofre Rojo y H. McIntosh.

## Serie de química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro Paladini y M. Burachik.
N° 4. Mecanismo de las Reacciones Orgánicas, por Jorge A. Brieux.
N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.
N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.

## Serie de biología

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.

N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.
N° 7. Principios Generales de Microbiología, por Norberto J. Palleroni.
N° 8. Los Virus, por Enriqueta Pizarro-Suárez y Gamba.
N° 9. Introducción a la Ecología del Bentos Marino, por Manuel Vegas Vélez.

En preparación

Serie de matemática

Teoría de los Grupos, por Horacio O'Brien.

Serie de física

Radiación Cósmica, por Gastón Mejía y Carlos Aguirre.



Serie de química

Temas Modernos de Química Inorgánica, por Rubén Levitus.
Complejos, por Carlos Andrade.
Fotoquímica de Moléculas Sencillas, por Ralf Penzhorn.
Introducción a la Geoquímica, por Félix González Bonorino.

Serie de biología

Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
Elementos de Inmunología e Inmunoquímica, por Félix Córdoba y Sergio Estrada-Parra.
Inventario de Vegetación de Biomas, por Jorge Morello.
Los Sistemas Ecológicos y el Hombre, por Francesco Di Castri.
Biogeografía de América Latina, por Angel L. Cabrera y Abraham Willink.
Introdução a Genética Humana, por P. H. Saldanha.
La Selva Tropical, por Arturo Gómez-Pompa.
Fermentaciones, por Carlos del Río E.
Procesos Microbianos Aerobios de Importancia Industrial, por Carlos Casas Campillo.

Nota. Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la División de Ventas y Promoción, Organización de los Estados Americanos, Washington, D. C., 20006 o a las Oficinas Nacionales de la OEA en el país respectivo.